В.Б. Уваров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1982

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

В.Б. УВАРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть П

Издательство Московского университета
1 9 8 2

Рецензенты:

канд.физ.-мат.наук, доцент Е.И.Моисеев
докт.физ.-мат.наук, доцент В.Ф.Бутузов

Уваров В.Б. Математический анализ, часть II: Учебное пособие. - М.: Изд-во Моск.ун-та, 1982. - 198 с.

Курс "Математический анализ" состоит из двух частей.

Первая часть курса посвящалась изложению дифференциального исчисления для функций одной и нескольких переменных (издана в 1980 г.)

Во второй части курса излагается интегральное исчисление для функций одной переменной, теория функциональных последовательностей, рядов и интегралов Фурье, кратные интегралы и векторный анализ.

Курс рассчитан на лиц, окончивших вузы, но не имеющих систематического математического образования.

Основная цель данного курса - быстрое овладение материалом математического анализа в объеме программы физических факультетов университетов.

© Издательство Московского университета, 1982 г.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Г л а в а 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 5-79

§ I. Определенный интеграл 5

§ 2. Суммы Дарбу. Интегралы Дарбу 8

§ 3. Условия интегрируемости функций I0

§ 4. Основные свойства определенного интеграла I8

§ 5. Связь между неопределенным и определенным интегралами 23

§ 6. Замена переменной (подстановка) в неопределенном и определенном интегралах. Интегрирование по частям 27

§ 7. Интегрирование рациональных функций 32

§ 8. Интегралы, сводящиеся заменой переменных к интегралам от рациональных функций 39

§ 9. Приближенные формулы для вычисления определенных интегралов 44

§I0. Несобственные интегралы 54

§II. Определенный и неопределенный интегралы для комплекснозначных и вектор-функций 60

§I2. Интегралы, зависящие от параметров 63

Г л а в а 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ 80-I30

§ I. Определение и основные свойства функциональных последовательностей 80

§ 2. Почленное дифференцирование и интегрирование последовательностей 84

§ 3. Функциональные ряды 88

§ 4. Теорема Арцела 92

§ 5. Равномерное приближение заданной функции полиномами 96

§ 6. Сходимость в среднем. Ряды Фурье 102
§ 7. Сходимость ряда Фурье в точке. Интеграл Фурье 111
§ 8. Функциональные последовательности комплекснозначных и вектор-функций 127
Глава 8. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 130-159
§ 1. Измеримые множества (по Жордану) 130
§ 2. Понятие кратного интеграла (по Риману) ... 136
§ 3. Верхние и нижние суммы Дарбу. Условия интегрируемости функций 137
§ 4. Основные свойства кратного интеграла 146
§ 5. Приведение кратных интегралов к повторным интегралам 148
§ 6. Замена переменных в кратном интеграле 153
Глава 9. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ 160-198
§ 1. Кривая в m-мерном пространстве 160
§ 2. Криволинейные интегралы 166
§ 3. Гладкая поверхность 171
§ 4. Площадь поверхности 177
§ 5. Поверхностный интеграл первого рода 180
§ 6. Поверхностный интеграл второго рода 182
§ 7. Формула Гаусса-Остроградского 186
§ 8. Формула Стокса 190
§ 9. Оператор набла 194

Глава 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ I. Определенный интеграл

Когда мы ввели понятие первообразной, то это понятие было сформулировано неконструктивным образом, а лишь с помощью действия, обратного действию нахождения производной. Конструктивный способ вычисления первообразной для заданной функции $f(x)$ дается с помощью понятия определенного интеграла. Рассмотрим это понятие.

Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[a, b]$ $(a < b)$. Обозначим через R разбиение сегмента $[a, b]$ при помощи не совпадающих друг с другом точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, на n частичных сегментов $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ длиной $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Обозначим через $S_R(\xi_i)$ сумму

$$S_R(\xi) = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \quad .$$

$$(\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \ \xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})).$$

Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(x)$, соответствующей разбиению R сегмента $[a, b]$ и данному выбору точек ξ_i на частичных сегментах ,

Обозначим через Δ величину $\Delta = \max_i \Delta x_i$.

Определение. Число S называется пределом интегральных сумм при $\Delta \to 0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого разбиения R, удовлетворяющего условию $\Delta < \delta$ при любом выборе точек ξ_i на сегментах $[x_i, x_{i+1}]$ выполняется неравенство:

$$|S_R(\xi) - S| < \varepsilon.$$

Обозначение: $$S = \lim_{\Delta \to 0} S_R(\xi).$$

Определение. Функция $f(x)$ называется интегрируемой на сегменте $[a, b]$ (по Риману), если существует конечный предел S интегральных сумм этой функции при $\Delta \to 0$. Предел S называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Обозначение:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Укажем на геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Рассмотрим график функции $f(x)$ и предположим, что $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$. Величина $f(\xi_i)\Delta x_i$ равна площади прямоугольника со сторонами длиной $f(\xi_i)$ и Δx_i. Поэтому сумма $S_R(\xi)$ равна площади ступенчатой фигуры, составленной из таких прямоугольников (на рисунке эта фигура заштрихована). В пределе при $\Delta \to 0$ мы получаем, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной фигуры, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x)$.

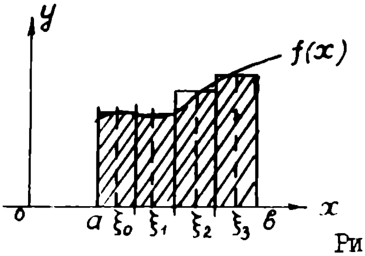


Рис. 1

Если отказаться от требования $f(x)>0$, то приходим к той же интерпретации определенного интеграла с дополнительным соглашением, что часть площади криволинейной фигуры, лежащая ниже оси y, берется со знаком минус.

Рассмотрим некоторые необходимые и достаточные условия интегрируемости функций.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$ и не ограничена на некотором сегменте $[x_k, x_{k+1}]$, входящем в разбиение R сегмента $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$. Пусть $J_R(\xi)$ – часть интегральной суммы $S_R(\xi)$, соответствующая всем частичным сегментам, кроме сегмента $[x_k, x_{k+1}]$. Тогда

$$S_R(\xi)=J_R(\xi)+f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad \text{где } \xi_k\in[x_k, x_{k+1}].$$

В силу неограниченности функции $f(x)$ на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ всегда можно так выбрать точку ξ_k, чтобы при любом $c>0$ выполнялось неравенство:

$$|f(\xi_k)\Delta x_k| > c + |J_R(\xi)|.$$

Тогда

$$|S_R(\xi)|=|J_R(\xi)+f(\xi_k)\Delta x_k|\geq|f(\xi_k)\Delta x_k|-|J_R(\xi)|>c.$$

Ввиду произвольности числа c суммы $S_R(\xi)$ не могут иметь предел при $\Delta\to 0$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Мы рассмотрели необходимое условие интегрируемости функций. Для формулировки достаточных условий нам понадобятся так называемые суммы Дарбу.

§ 2. Суммы Дарбу. Интегралы Дарбу

Если в выражении для интегральной суммы заменить величины $f(\xi_i)$ $(\xi_i \in [x_i, x_{i+1}])$ на величины

$$M_i = \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad \text{или} \quad m_i = \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x),$$

то мы получаем так называемые верхнюю и нижнюю сумму Дарбу:

$$\overline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \,, \quad \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \,.$$

Так как $\Delta x_i > 0$ и $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$,

то $\underline{S}_R \leq S_R(\xi) \leq \overline{S}_R$.

Если существуют равные друг другу пределы

$$\lim_{\Delta\to 0} \underline{S}_R \,, \quad \lim_{\Delta\to 0} \overline{S}_R \,,$$

то, в силу последнего неравенства, по теореме сравнения для пределов должен существовать предел интегральных сумм S.

Покажем, что условие существования и равенства пределов $\lim\limits_{\Delta\to 0} \underline{S}_R$ и $\lim\limits_{\Delta\to 0} \overline{S}_R$ можно заменить более слабым условием существования и равенства нулю предела $\lim\limits_{\Delta\to 0}(\overline{S}_R - \underline{S}_R)$.

Введем предварительно ряд обозначений.

Пусть R_1 и R_2 – два разбиения сегмента $[a, b]$. Если разбиение R_2 получается из разбиения R_1 добавлением новых точек деления, то это обстоятельство будем записывать следующим образом: $R_1 \subset R_2$. Пусть теперь R_1 и R_2 – произвольные разбиения сегмента $[a, b]$. Будем называть разбиение R_3 объединением разбиений R_1 и R_2, если

множество точек деления в разбиении R_3 является объединением множеств точек деления для разбиений R_1 и R_2. Обозначение: $R_3 = R_1 + R_2$. Очевидно, что $R_1 \subset R_3$, $R_2 \subset R_3$. Рассмотрим поведение сумм Дарбу при переходе от одного разбиения к другому.

<u>Теорема</u>. Суммы Дарбу обладают следующими свойствами:

1) если

$$R_1 \subset R_2, \text{ то } \overline{S}_{R_1} \geq \overline{S}_{R_2}, \quad \underline{S}_{R_1} \leq \underline{S}_{R_2},$$

2) для произвольных разбиений R_1 и R_2 будет $\underline{S}_{R_1} \leq \overline{S}_{R_2}$.

<u>Доказательство</u>. 1. Достаточно ограничиться случаем, когда разбиение R_2 получается из разбиения R_1 добавлением одной точки $\tilde{x}$ в сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ (общий случай соответствует повторению этой процедуры несколько раз). Сумма Дарбу $\overline{S}_{R_1}$, при таком добавлении точки деления изменится следующим образом: член суммы, равный $M_k(x_{k+1} - x_k)$, заменится на сумму

$$M_k'(\tilde{x} - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x_k),$$

где

$$M_k' = \sup_{x \in [x_k, \tilde{x}]} f(x), \quad M_k'' = \sup_{x \in [\tilde{x}, x_{k+1}]} f(x).$$

Остальные члены суммы $\overline{S}_{R_1}$ останутся без изменения. Так как $M_k' \leq M_k$, $M_k'' \leq M_k$, то

$$M_k'(\tilde{x} - x_k) + M_k''(x_{k+1} - \tilde{x}) \leq M_k(x_{k+1} - x_k)$$

и, следовательно, $\overline{S}_{R_2} \leq \overline{S}_{R_1}$. Аналогично проводится доказательство для нижних сумм Дарбу.

2. Пусть R_1 и R_2 – произвольные разбиения сегмента $[a, b]$ и $R_3 = R_1 + R_2$. Так как

$R_1 \subset R_3$, $R_2 \subset R_3$, то $\underline{S}_{R_1} \leq \underline{S}_{R_3} \leq \overline{S}_{R_3} \leq \overline{S}_{R_2}$.

Мы воспользовались тем, что для одного и того же разбиения нижняя сумма Дарбу не превышает верхнюю (так как $m_i \leq M_i$). Теорема доказана.

Таким образом, мы доказали, что все верхние суммы Дарбу ограничены снизу, а нижние суммы Дарбу ограничены сверху. Поэтому существуют точные грани

$$\inf_R \overline{S}_R = \overline{S} \qquad \text{и} \qquad \sup_R \underline{S}_R = \underline{S} .$$

Величины $\overline{S}$ и $\underline{S}$ называются, соответственно, верхним и нижним интегралом Дарбу от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Из определения интегралов Дарбу $\overline{S}$ и $\underline{S}$ и неравенства $\overline{S}_{R_1} \geq \underline{S}_{R_2}$ для любых разбиений R_1 и R_2 сегмента $[a, b]$ вытекают следующие неравенства: $\overline{S}_{R_1} \geq \overline{S} \geq \underline{S} \geq \underline{S}_{R_2}$.

§ 3. Условия интегрируемости функций

Перейдем к рассмотрению условий интегрируемости функций.

Теорема. Для того, чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция была интегрируемой, на этом сегменте необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\Delta \to 0} (\overline{S}_R - \underline{S}_R) = 0$$

при любых способах разбиения R сегмента $[a, b]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Это значит, что при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что $| S_R(\xi) - S | < \varepsilon_1$, если $\Delta < \delta$ при любом выборе точек ξ_i (здесь $S = \int_a^b f(x)dx$). В таком случае при любых двух выборах точек ξ_i : $\xi_i = \tilde{\xi}_i$ и $\xi_i = \overline{\xi}_i$, —

будем иметь :

$$|S_R(\tilde{\xi}) - S_R(\bar{\xi})| = |[S_R(\tilde{\xi}) - S] - [S - S_R(\bar{\xi})]| \le$$

$$\le |S_R(\tilde{\xi}) - S| + |S_R(\bar{\xi}) - S| < 2\varepsilon_1 \text{ , если } \Delta < \delta.$$

Так как

$$M_i = \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad , \quad m_i = \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) \ ,$$

то на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ найдутся такие точки $\tilde{\xi}_i$ и $\bar{\xi}_i$, что

$$M_i - f(\tilde{\xi}_i) < \varepsilon_1 \ , \ f(\bar{\xi}_i) - m_i < \varepsilon_1 \ .$$

При таком выборе точек $\tilde{\xi}_i$ и $\bar{\xi}_i$ имеем :

$$\bar{S}_R - S_R(\tilde{\xi}) = \sum_{i=0}^{n-1}[M_i - f(\tilde{\xi}_i)]\Delta x_i < \varepsilon_1 (b-a) ,$$

$$S_R(\bar{\xi}) - \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1}[f(\bar{\xi}_i) - m_i]\Delta x_i < \varepsilon_1 (b-a) ,$$

откуда $0 \le \bar{S}_R - \underline{S}_R = [\bar{S}_R - S_R(\tilde{\xi})] + [S_R(\bar{\xi}) - \underline{S}_R] +$

$$+ [S_R(\tilde{\xi}) - S_R(\bar{\xi})] \le \varepsilon_1(b-a) + \varepsilon_1(b-a) + 2\varepsilon_1 = \varepsilon_1[2 + 2(b-a)] .$$

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Выберем ε_1 из условия $\varepsilon_1[2 + 2(b-a)] = \varepsilon$. Тогда $0 \le \bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$ при $\Delta < \delta$, т.е. $\lim\limits_{\Delta\to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$.

<u>Достаточность</u>. Пусть $\lim (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$.

Так как $\underline{S}_R \le \underline{S} \le \overline{S} \le \overline{S}_R$,

то $\overline{S} - \underline{S} \le \overline{S}_R - \underline{S}_R$

($\overline{S}$ и $\underline{S}$ – верхний и нижний интеграл Дарбу от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$). Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $\Delta \to 0$, а левая часть от Δ не зависит, то $\overline{S} = \underline{S} = S$. (S – общее обозначение для $\overline{S}$ и $\underline{S}$). Рассмотрим величину $|S_R(\xi) - S|$, где $S_R(\xi)$ – интегральная сумма. Так как $\underline{S}_R \le S_R(\xi) \le \overline{S}_R$ и $\underline{S}_R \le S \le \overline{S}_R$, то

$$|S_R(\xi) - S| \le \overline{S}_R - \underline{S}_R .$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\Delta \to 0$ независимо от способа разбиения R , поэтому число S является пределом для интегральных сумм $S_R(\xi)$ при $\Delta \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta \to 0} S_R(\xi) = S,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Условие

$$\lim_{\Delta \to 0} (\overline{S}_R - \underline{S}_R) = 0$$

удобно переписать в другом виде.

Пусть

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = \sup_{x, x' \in [x_i, x_{i+1}]} [f(x) - f(x')] .$$

Заменяя в этом выражении x на x', и наоборот, полу-

чим $\omega_i = \sup\limits_{x,x'} [f(x') - f(x)]$. Так как $|f(x) - f(x')| = \max\{[f(x) - f(x')], [f(x') - f(x)]\}$, то для величины ω_i можно получить более симметричное выражение:

$$\omega_i = \sup_{x,x' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - f(x')| .$$

Величина ω_i называется колебанием функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$.

Равенство $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$ равносильно равенству:

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0 .$$

Рассмотрим ряд следствий доказанной теоремы.

<u>Следствия</u>. I. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на любом сегменте $[c, d] \subset [a, b]$.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то на этом сегменте интегрируема также функция $|f(x)|$.

3. Пусть на сегменте $[a, b]$ интегрируемы функции $f(x)$ и $g(x)$. Тогда на этом сегменте интегрируемы также функции $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ (c_1, c_2 – произвольные постоянные), $f(x) \cdot g(x)$, а при дополнительном условии $|g(x)| \geq k > 0$ интегрируема также функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

<u>Доказательство</u>. I. Пусть R' – произвольное разбиение сегмента $[c, d] \subset [a, b]$, а $\bar{S}_{R'}$ и $\underline{S}_{R'}$ – верхняя и нижняя суммы Дарбу для этого разбиения R'. Дополним разбиение R' сегмента $[c, d]$ до некоторого разбиения R сегмента $[a, b]$, вставляя вне сегмента $[c, d]$ дополнительные точки деления таким образом,

чтобы максимальная длина Δ частичных сегментов на $[a, b]$ не превышала максимальную длину частичных сегментов на $[c, d]$. Если $\bar{S}_R$ и $\underline{S}_R$ – верхняя и нижняя сумма для разбиения R, то $0 \leq \bar{S}_{R'} - \underline{S}_{R'} \leq \bar{S}_R - \underline{S}_R$

(для доказательства достаточно воспользоваться равенством $\bar{S}_R - \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ и аналогичным равенством для $\bar{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}$).
Так как в силу интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеем
$$\lim_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0,$$

то из последнего неравенства вытекает выполнение условия интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[c, d]$:

$$\lim_{\Delta \to 0} (\bar{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}) = 0.$$

2. Пусть ω_i – колебание функции $f(x)$ на частичном сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ при разбиении R сегмента $[a, b]$. Оценим колебание $\bar{\omega}_i$ функции $|f(x)|$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$. Так как при

$$x, x' \in [x_i, x_{i+1}] \quad \big| |f(x)| - |f(x')| \big| \leq |f(x) - f(x')|$$

то $\bar{\omega}_i \leq \omega_i$

Поэтому из условия интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$: $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$ –

вытекает выполнение условия интегрируемости функции $|f(x)|$ на сегменте $[a, b]$:

$$\lim_{\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i \Delta x_i = 0.$$

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$, а ω_i, $\overline{\omega}_i$ колебания функций $f(x)$ и $g(x)$ на частичном сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ при разбиении R сегмента $[a,b]$. Оценим колебания $\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}, \omega_i^{(3)}$ функций $c_1 f(x) + c_2 g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Пусть

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad \overline{M} = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|, \quad K = \inf_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Тогда при $x, x' \in [x_i, x_{i+1}]$:

а) $$\left|[c_1 f(x) + c_2 g(x)] - [c_1 f(x') + c_2 g(x')]\right| = \left| c_1[f(x) - f(x')] + \right.$$
$$\left. + c_2[g(x) - g(x')]\right| \le |c_1|\,\omega_i + |c_2|\,\overline{\omega}_i ;$$

б) $$|f(x)g(x) - f(x')g(x')| = |f(x)[g(x) - g(x')] +$$
$$+ g(x')[f(x) - f(x')]| \le M\overline{\omega}_i + \overline{M}\omega_i ;$$

в) $$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x')}{g(x')}\right| = \left|\frac{f(x)[g(x') - g(x)]}{g(x)g(x')} + \frac{[f(x) - f(x')]}{g(x')}\right| \le$$
$$\le \frac{M}{K^2}\overline{\omega}_i + \frac{1}{K}\omega_i .$$

Отсюда $\omega_i^{(1)} \le |c_1|\,\omega_i + |c_2|\,\overline{\omega}_i$, $\quad \omega_i^{(2)} \le M\cdot\overline{\omega}_i + \overline{M}\cdot\omega_i$,

$$\omega_i^{(3)} \le \frac{M}{K^2}\overline{\omega}_i + \frac{1}{K}\omega_i .$$

Так как в силу интегрируемости функций $f(x)$ и $g(x)$ имеем:

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i \Delta x_i = 0 ,$$

то для функций

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) , \quad f(x) g(x) \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{при } k > 0)$$

выполняются условия интегрируемости:

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(1)} \Delta x_i = 0 , \quad \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(2)} \Delta x_i = 0, \quad \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^{(3)} \Delta x_i = 0.$$

Рассмотрим теперь классы функций, для которых условия интегрируемости на сегменте $[a, b]$ выполнены.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$ и для любого числа $\delta_0 > 0$ можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва функции $f(x)$ и имеющих общую сумму длин меньше δ_0. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Пусть при фиксированном значении δ_0 точки разрыва функции $f(x)$ можно покрыть $\ell = \ell(\delta_0)$ интервалами с суммой длин, меньшей δ_0. Выбросим из сегмента $[a, b]$ эти интервалы. Тогда останется не более $\ell + 1$ сегмента $[a_k, b_k]$ $(0 \leq k \leq \ell)$. Совокупность сегментов $[a_k, b_k]$ является замкнутым числовым множеством F. Так как функция $f(x)$ непрерывна на этом множестве, то она будет равномерно непрерывной на нем. Поэтому при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что $|f(x) - f(x')| < \varepsilon_1$, если $x, x' \in F$ и $|x - x'| < \delta$. Рассмотрим произвольное разбиение R сегмента $[a, b]$. При этом возникает две группы частичных сегментов – сегменты, которые имеют с выброшенными интервалами хотя бы одну общую точку и сегменты, не имеющие с выброшенными интервалами общих точек. Если длина

частичного сегмента не превышает Δ, то суммарная длина сегментов первой группы не превышает $\delta_0 + 2\ell\Delta$ (к длине каждого интервала добавлены два сегмента с краев этого интервала).

Имеем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_i{}' \omega_i \Delta x_i + \sum_i{}'' \omega_i \Delta x_i .$$

Первое слагаемое отвечает сегментам первой группы, второе слагаемое – сегментам второй группы (ω_i – колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$).

Покажем, что выполняется условие интегрируемости функций

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

Для первой группы слагаемых величина ω_i может оказаться не малой величиной при $\Delta \to 0$, так как функция $f(x)$ может иметь точки разрыва непрерывности в сегментах первой группы. Поэтому оценим величину ω_i для сегментов первой группы грубо. В силу ограниченности функции $f(x)$ имеем $|f(x)| < M$ (M – некоторая постоянная). Поэтому

$$\omega_i = \sup_{x,x'\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x_i) - f(x')| \le \sup_{x,x'\in[x_i,x_{i+1}]} \left[|f(x)| + |f(x')| \right] \le 2M,$$

откуда

$$\sum_i{}' \omega_i \Delta x_i \le 2M \sum{}' \Delta x_i \le 2M(\delta_0 + 2\ell\Delta).$$

Для сегментов второй группы, в силу неравенства $|f(x) - f(x')| < \varepsilon_1$ при $|x - x'| < \delta(\varepsilon_1)$, имеем:

$$\sum_i{}'' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon_1 \sum_i{}'' \Delta x_i \le \varepsilon_1 (b-a),$$

если

$$\Delta < \delta \qquad (\Delta = \max_i \Delta x_i)$$

Таким образом, при $\Delta < \delta$ имеем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x \leq 2M(\delta_0 + 2\ell\delta) + \varepsilon_1(b-a),$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Выберем числа δ_0 и ε_1 из условия: $4M\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_1(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

При фиксированных значениях δ_0 и ε_1 возьмем δ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $2\ell\delta < \delta_0$. Тогда при $\Delta < \delta$ получим:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x \leq 2M(\delta_0 + 2\ell\delta) + \varepsilon_1(b-a) < 4M\delta_0 + \varepsilon_1(b-a) < \varepsilon.$$

Это и доказывает, что функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.

Частным случаем функций, удовлетворяющих условиям доказанной теоремы, являются так называемые кусочно-непрерывные функции, т.е. ограниченные функции, являющиеся непрерывными на сегменте $[a, b]$ за исключением конечного числа точек. Итак, непрерывные и кусочно-непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции интегрируемы на этом сегменте.

Из доказанной теоремы и определения определенного интеграла вытекает, что изменение значений функции $f(x)$ в конечном числе точек не влияет ни на интегрируемость функции, ни на величину интеграла (проверить самостоятельно).

§ 4. Основные свойства определенного интеграла

Все встречающиеся в этом разделе функции будем считать интегрируемыми на сегменте $[a, b]$. При рассмотрении свойств определенного интеграла дополнительно будем считать

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{при} \quad a > b.$$

Теорема. Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

1. $$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

(c_1 , c_2 – произвольные постоянные).

2. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Если $f(x) \geq g(x)$ при $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \qquad (a < b).$$

4. Если $g(x) \geq 0$ на сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

где

$$m \leq \mu \leq M, \quad m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Рассматриваемое соотношение называется формулой среднего значения для определенного интеграла. При $g(x) \equiv 1$ формула среднего значения имеет особенно простой вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \quad \text{где} \quad m \leq \mu \leq M.$$

Доказательство. I. Рассматриваемое свойство, называемое свойством линейности определенного интеграла, вытекает из аналогичного свойства интегральных сумм и предела.

2. Пусть $c \in (a,b)$, $a < b$ и R – любое разбиение сегмента $[a,b]$. Включим в число точек деления сегмента $[a,b]$ точку c. Тогда для интегральных сумм имеем следующие равенства:

$$S_R(\xi) = S_R^{(1)}(\xi) + S_R^{(2)}(\xi).$$

Первая сумма соответствует частичным сегментам, входящим в сегмент $[a,c]$, вторая сумма – сегментам, входящим в сегмент $[c,b]$. Переходя к пределу при $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max \Delta x_i$), получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Пусть теперь $c > b$. Тогда по доказанному

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

Отсюда по-прежнему имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Аналогично разбираются другие случаи расположения точек a, b, c.

3. Положим $h(x) = f(x) - g(x)$. Так как $f(x) \geq g(x)$ на сегменте $[a,b]$, то на этом сегменте $h(x) \geq 0$. Следовательно, при $a < b$ все интегральные суммы функции $h(x)$ будут неотрицательны, откуда в пределе при $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max\limits_i \Delta x_i$) получаем:

$$\int_a^b h(x)\,dx \geq 0\,, \quad \text{т.е.}\quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

4. Пусть $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)\,, \quad m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

и $g(x) \geq 0$ на сегменте $[a,b]$. Так как

$$m g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M g(x),$$

то по доказанному выше свойству определенного интеграла получим при $a < b$ неравенство

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Предположим, что $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда для величины

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

получаем неравенства $m \leq \mu \leq M$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx\,, \quad \text{где}\quad m \leq \mu \leq M\,.$$

Это соотношение остается справедливым и при $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, так как из неравенства

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

вытекает, что в этом случае $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Мы доказали формулу среднего значения при $a < b$. Распространить эту формулу на случай $a > b$ можно с помощью равенств

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = -\int_b^a f(x)g(x)\,dx, \quad \int_a^b g(x)\,dx = -\int_b^a g(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Замечания. I. Так как на величину определенного интеграла не влияет изменение значения подынтегральной функции в конечном числе точек, то в свойстве 4 можно полагать

$$m = \inf_{x\in(a,b)} f(x), \qquad M = \sup_{x\in(a,b)} f(x),$$

а в свойстве 3 требовать выполнения неравенства $f(x) \geq g(x)$ лишь на интервале (a, b).

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она принимает на этом сегменте любое значение μ, заключенное между m и M. Поэтому формулу среднего значения можно переписать в виде:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \qquad (\xi \in [a, b]).$$

В частности, при $g(x) \equiv 1$ формула принимает вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \qquad (\xi \in [a, b]).$$

3. Свойство 3 определенного интеграла позволяет получить удобную оценку:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|.$$

Для доказательства будем исходить из неравенства:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Отсюда при $a < b$ получим:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

т.е.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Если $a > b$, то для доказательства достаточно воспользоваться соотношением:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \int_a^b |f(x)|\,dx = -\int_b^a |f(x)|\,dx.$$

§ 5. Связь между неопределенным и определенным интегралом

Связь между понятиями неопределенного и определенного интеграла можно установить, рассматривая функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

которую называют интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Функция $F(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и в точках непрерывности функции $f(x)$ имеет производную, равную $f(x)$.

Доказательство. Функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и, следовательно, ограничена на этом сегменте, т.е. $|f(x)| \le M$ (M - некоторая постоянная).

Оценим приращение функции $F(x)$:

$$\left|F(x+\Delta x)-F(x)\right| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \le M|\Delta x|.$$

Из этого неравенства и вытекает непрерывность функции $F(x)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} F(x+\Delta x) = F(x).$$

Пусть теперь x – точка непрерывности функции $f(x)$. Покажем, что в этой точке функция $F(x)$ имеет производную, равную $f(x)$. В силу непрерывности функции $f(x)$ в рассматриваемой точке при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$, если $|t-x| < \delta$. Поэтому при $|\Delta x| < \delta$ имеем :

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} - f(x)\right| = \left|\frac{\int_x^{x+\Delta x}[f(t)-f(x)]\,dt}{\Delta x}\right| \le$$

$$\le \frac{\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)-f(x)|\,dt\right|}{|\Delta x|} < \frac{\varepsilon\left|\int_x^{x+\Delta x}dt\right|}{|\Delta x|} = \varepsilon.$$

Это и означает, что существует предел $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$, равный $f(x)$. Теорема доказана.

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то из теоремы вытекает, что на этом сегменте функция $f(x)$ имеет первообразную, равную $F(x)$.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления)

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, а функция $F(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b). Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница. Разность $F(b) - F(a)$ иногда для краткости обозначают через $F(x)\Big|_a^b$ и называют подстановкой функции $F(x)$ в пределах от a до b.

Доказательство. Предположим сначала, что $b > a$. Рассмотрим некоторое разбиение R сегмента $[a, b]$ с помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_{i+1} > x_i)$.
Представим разность $F(b) - F(a)$ в эквивалентном виде.
Так как

$$\sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = F(x_n) - F(x_0),$$

то

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)].$$

По формуле Лагранжа конечных приращений для функции $F(x)$ имеем:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где

$$\xi_i \in (x_i, x_{i+1}), \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Мы воспользовались тем, что на интервале (a, b) имеем:

$$F'(x) = f(x).$$

Таким образом,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Стоящая в правой части этого равенства сумма является интегральной суммой $S_R(\xi)$ для функции $f(x)$, соответствующей разбиению R и некоторому выбору точек ξ_i на частичных сегментах $[x_i, x_{i+1}]$. В силу интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ при любом выборе точек ξ_i на частичных сегментах существует предел

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (\Delta = \max \Delta x_i).$$

Поэтому в пределе получаем равенство:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx ,$$

что и требовалось доказать. Если $b < a$, то для доказательства достаточно воспользоваться равенством

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Так как по доказанному выше имеем при $a > b$

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) ,$$

то и в этом случае получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Теорема доказана.

В связи с тем, что вычисление определенного интеграла удалось свести к вычислению первообразной подинтегрального выражения рассмотрим некоторые приемы вычисления неопределенного интеграла.

§ 6. Замена переменной (подстановка) в неопределенном и определенном интеграле. Интегрирование по частям

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и при $t \in [\alpha, \beta]$ функция $x = \varphi(t)$ принимает значения на сегменте $[a, b]$. Если существует производная $\varphi'(t)$, то по формуле дифференцирования сложной функции имеем:

$$\{F[\varphi(t)]\}' = F'(x)\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) ,$$

т.е. функция $F[\varphi(t)]$ является первообразной для функции $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$, откуда

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + c \quad \text{при} \quad t \in [\alpha, \beta] .$$

Но

$$F[\varphi(t)] + c = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)} .$$

Поэтому мы приходим к следующей формуле замены переменных в неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dx=\int f[\varphi(t)]\,d\varphi(t).$$

Пример

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dt}{1-t^2}\Big|_{t=\sin x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

Рассмотрим теперь формулу замены переменных в определенном интеграле.

Теорема. Пусть функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[\alpha,\beta]$ и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, а значения функции $\varphi(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$ принадлежат сегменту $[A,B]$, на котором функция $f(x)$ непрерывна. Тогда

справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Для неопределенных интегралов имеет место равенство

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt.$$

Поэтому, если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на сегменте $[A,B]$, то функция $F[\varphi(t)]$ является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ при $t\in(\alpha,\beta)$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве теоремы мы воспользовались существованием первообразной у непрерывных функций. Это свойство вытекает из существования определенного интеграла $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ для непрерывной на сегменте $[a,b]$ функции $f(x)$ и соотношения $F'(x)=f(x)$ при $x\in[a,b]$.

Рассмотрим теперь так называемую формулу интегрирования по частям. Докажем справедливость формулы

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

в предположении, что обе части равенства имеют смысл. Для доказательства достаточно вычислить неопределенный интеграл от обеих частей равенства

$$u(x)\cdot v'(x) = [u(x)v(x)]' - v(x)\cdot u'(x) .$$

Более простая запись формулы интегрирования по частям:

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x) .$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\int x^m \ln x\,dx$. Положим в формуле интегрирования по частям

$u(x) = \ln x, \quad v'(x) = x^m$. Тогда $v(x) = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$,

откуда

$$\int x^m \ln x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \int \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + c .$$

Рассмотрим теперь формулу интегрирования по частям для определенных интегралов.

<u>Теорема.</u> Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют на сегменте $[a, b]$ интегрируемые производные $u'(x)$, $v'(x)$,

тогда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)$$

(формула интегрирования по частям).

<u>Доказательство.</u> Так как функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные на сегменте $[a, b]$, то они непрерывны на этом сегменте. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b [u(x)v(x)]'dx =$$

$$= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx .$$

Это равенство равносильно доказываемому соотношению. Теорема доказана.

В качестве примера применения формулы интегрирования по частям получим формулу Тейлора для функции $f(x)$, имеющей на сегменте $[a, b]$ интегрируемую производную порядка $n+1$. Имеем

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt .$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям, полагая

$$u(t) = f'(t), \quad v'(t) = 1, \quad v(t) = t - x :$$

$$\int_a^x f'(t)dt = f'(t)(t-x)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)dt .$$

Еще раз воспользуемся формулой интегрирования по частям, полагая

$$u(t)=f''(t)\,,\quad v'(t)=t-x\,,\quad v(t)=\frac{(t-x)^2}{2}\;:$$

$$\int_a^x f'(t)dt=f'(t)(t-x)\Big|_a^x-f''(t)\,\frac{(t-x)^2}{2}\Big|_a^x+\int_a^x f'''(t)\,\frac{(t-x)^2}{2}\,dt\,.$$

Продолжая последовательно применять формулу интегрирования по частям, получим:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt\,.$$

Мы получили формулу Тейлора с остаточным членом, записанным в интегральной форме.

Формулы замены переменной и интегрирования по частям можно применять и для кусочно-непрерывных функций, если сегмент $[a,b]$ можно разбить на ряд сегментов, в каждом из которых выполнены условия рассмотренных нами теорем. При этом следует воспользоваться формулами вида

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\,,\quad \text{где}\quad a=x_0<x_1<x_2\ldots<x_n=b\,,$$

а также соответотствующими формулами замены переменных или интегрирования по частям для каждого интеграла, взятого на сегменте

$[x_i\,,\,x_{i+1}]$.

§ 7. Интегрирование рациональных функций

Простейшими из типов неопределенных интегралов, выражающихся через элементарные функции, являются интегралы от рациональных функций, т.е. интегралы от функций вида $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - полиномы.

Для интегрирования рациональных функций произведем предварительно некоторые упрощения выражения $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Если степень полинома $P(x)$ больше или равна степени полинома $Q(x)$ (рациональная функция - "неправильная дробь"), то предварительно разделим полином $P(x)$ на полином $Q(x)$ по правилам деления полиномов:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)} .$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ полиномы, причем степень полинома $P_2(x)$ меньше степени полинома $Q(x)$. Интеграл $\int P_1(x)dx$ легко вычисляется. Таким образом, при вычислении интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ всегда можно считать, что степень полинома $P(x)$ меньше степени полинома $Q(x)$. Произведем дальнейшее упрощение выражения $\frac{P(x)}{Q(x)}$, считая, что полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ имеют вещественные коэффициенты при степенях переменной x.

Упрощение рациональной функции опирается на знание корней полинома, стоящего в знаменателе этой функции. Напомним основные сведения о корнях полинома. В комплексной плоскости $z = x + iy$ полином $Q_n(z)$ степени n представля-

ется в виде произведения $Q(z) = C\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$,

где C – постоянная, z_k – корень полинома $Q(z)$. Если в этом произведении корень z_p встречается ℓ раз , то

$$Q(z) = (z-z_p)^{\ell} r_p(z) , \qquad \text{где } r_p(z_p) \neq 0.$$

В этом случае говорят, что полином $Q_n(z)$ имеет корень $z = z_p$ кратности ℓ. Если полином $Q_n(z)$ имеет вещественные коэффициенты, то наряду с корнем $z = z_p$ он имеет корень $z = \bar{z}_p$ той же кратности (черта – знак комплексного сопряжения). Для доказательства достаточно воспользоваться равенством $\bar{z}^m = \overline{(\bar{z})^m}$:

$$Q(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m = \overline{\sum_{m=0}^{n} a_m (\bar{z})^m} = \overline{Q(\bar{z})} .$$

Поэтому, если $Q(z) = C\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$, то

$$Q(z) = \overline{C\prod_{k=1}^{n}(\bar{z}-z_k)} = \bar{C}\prod_{k=1}^{n}(z-\bar{z}_k).$$

Это равенство возможно лишь в случае, если $\bar{C} = C$ и множители в полиноме $Q(z)$, содержащие корень z_p , в произведении $\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ встречаются столько же раз, сколько и множители, содержащие $\bar{z}_p$.

Рассмотрим сначала упрощения рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$, связанные со знанием вещественных корней знаменателя.

Пусть полином $Q(x)$ имеет корень $x = a$ (a – вещественное число) порядка k , т.е. $Q(x) = (x-a)^k r(x)$, где $r(x)$ – полином, причем $r(a) \neq 0$. Подберем постоянную A из условия, чтобы полином $P(x) - A r(x)$

нацело делился на $(x-a)$. По теореме Безу получаем

$$A=\frac{P(a)}{z(a)}.$$

В результате приходим к равенству $P(x)-A\,z(x)=(x-a)\,P_1(x)$, где $P_1(x)$ – полином степени, меньшей максимальной из степеней полиномов $P(x)$ и $z(x)$. Так как полиномы $P(x)$ и $z(x)$, по предположению, имеют вещественные коэффициенты при степенях переменной x, то таким же свойством будет обладать и полином $P_1(x)$. Подставляя выражение $P(x)=A\,z(x)+(x-a)\,P_1(x)$, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^k z(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}z(x)}.$$

Так как полином $P(x)$ имеет степень меньшую, чем полином $Q(x)=(x-a)^k z(x)$, то выражение $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}z(x)}$ является "правильной дробью", т.е. степень полинома, стоящего в числителе, меньше степени полинома, стоящего в знаменателе. Точно таким же образом имеем при $k>1$:

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}z(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-2}z(x)},$$

где второе слагаемое является "правильной дробью". Продолжая этот процесс далее, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{s=1}^{k}\frac{A_s}{(x-a)^s}+\frac{\bar{p}(x)}{z(x)},$$

где A_s – некоторые постоянные, а степень полинома $\bar{P}(x)$ меньше степени полинома $z(x)$. Полином $z(x)$ имеет те же корни, что и полином $Q(x)$, за исключением корня $x=a$. Проводя выделение простых дробей для всех действительных корней

$Q(x)$, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{e} \sum_{s=1}^{k_e} \frac{A_{se}}{(x-a_e)^s} + \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)},$$

где a_e корень полинома $Q(x)$ кратности k_e, а $\tilde{P}(x)$ и $\tilde{Q}(x)$ - некоторые полиномы, причем степень полинома $\tilde{P}(x)$ меньше степени полинома $\tilde{Q}(x)$ и полином $\tilde{Q}(x)$ имеет лишь комплексные корни.

Рассмотрим теперь процесс выделения "простых" дробей из выражения $\frac{P(x)}{Q(x)}$, соответствующий комплексным корням полинома $Q(x)$. Пусть $Q(x)$ имеет комплексный корень α кратности k. Тогда комплексно сопряженное число $\bar{\alpha}$ также будет корнем полинома $Q(x)$ кратности k. Таким образом, полином $Q(x)$ должен делиться на $(x-\alpha)^k(x-\bar{\alpha})^k=(x^2+px+q)^k$, $(q-\frac{p^2}{4}>0)$, т.е. $Q(x)=(x^2+px+q)^k\, Q_1(x)$,

где $Q_1(\alpha)\neq 0$, причем полином $Q_1(x)$ имеет вещественные коэффициенты при степенях x, так как числа p и q - вещественные.

Подберем вещественные постоянные M и N так, чтобы полином $P(x)-(Mx+N)\,Q_1(x)$ делился нацело на полином x^2+px+q, т.е. на $(x-\alpha)$ и $(x-\bar{\alpha})$.

По теореме Безу имеем:

$$\left.\begin{array}{l} P(\alpha)-(M\alpha+N)\,Q_1(\alpha)=0 \\ P(\bar{\alpha})-(M\bar{\alpha}+N)\,Q_1(\bar{\alpha})=0 \end{array}\right\}.$$

Легко показать, что при $\alpha\neq\bar{\alpha}$ эта система уравнений относительно постоянных M и N имеет единственное решение. Действительно, детерминант этой системы равен

$$Q_1(\alpha)Q_1(\bar{\alpha})(\alpha-\bar{\alpha})=|Q_1(\alpha)|^2(\alpha-\bar{\alpha})$$

и при $\alpha \neq \bar{\alpha}$ отличен от нуля. То, что постоянные M и N будут вещественными числами, легко доказывается, если в рассматриваемых уравнениях перейти к комплексно сопряженным равенствам (постоянные $\bar{M}$ и $\bar{N}$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и постоянные M и N).

Таким образом,

$$P(x) = (Mx + N)\,Q_1(x) + (x^2 + px + q)\cdot P_1(x).$$

Поэтому

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^k Q_1(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}.$$

Второе слагаемое является "правильной дробью". Продолжая процесс выделения простых дробей, получим:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_1(x)},$$

где M_s , N_s - вещественные постоянные,

$\tilde{P}(x)$ - полином, имеющий степень, меньшую, чем полином $Q_1(x)$.

Таким образом, выражение $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы выражений типа $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ и $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

Коэффициенты в разложении рациональной функции на простые дроби обычно находятся методом неопределенных коэффициентов - выписывается предполагаемое разложение с неопределенными коэффициентами. Умножая обе части равенства на знаменатель, получаем равенство между некоторыми полиномами. Для неопределенных коэффициентов можно получить систему уравнений либо приравнивая коэффициенты при степенях переменной x в обеих частях равенства, либо используя это равенство при конкретных значениях переменной x .

Таким образом, интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию выражений вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

Первый из этих интегралов легко вычисляется:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(k-1)} \cdot \dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} & \text{при } k>1 \\ \ln|x-a| & \text{при } k=1 \end{cases}$$

(постоянную интегрирования опускаем). Для вычисления второго интеграла выделим в полиноме x^2+px+q полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Полагая $t = x+\frac{p}{2}$, $a^2 = q-\frac{p^2}{4} > 0$, получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^k}\,dt.$$

Интеграл $\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,dt$ легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d[t^2+a^2]}{(t^2+a^2)^k} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\cdot(k-1)}\,\dfrac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} & \text{при } k>1 \\ \dfrac{1}{2}\ln(t^2+a^2) & \text{при } k=1. \end{cases}$$

Остается рассмотреть интеграл

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

При $k=1$

$$J_k = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}.$$

Если $k>1$, то можно получить рекуррентную формулу, связывающую интегралы J_k и J_{k-1} . Имеем:

$$J_K = \frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^K}dt = \frac{1}{a^2}\left\{J_{K-1} - \frac{1}{2}\int\frac{t\,d[t^2+a^2]}{(t^2+a^2)^K}\right\}.$$

Во втором интеграле воспользуемся интегрированием по частям, полагая

$$U(t) = t \quad , \quad dV(t) = \frac{d[t^2+a^2]}{(t^2+a^2)^K}.$$

В результате получим:

$$J_K = \frac{1}{a^2}\left\{J_{K-1} + \frac{t}{2(K-1)(t^2+a^2)^{K-1}} - \frac{1}{2(K-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{K-1}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{\frac{t}{2(K-1)(t^2+a^2)^{K-1}} + \frac{2K-3}{2(K-1)}J_{K-1}\right\}.$$

Последовательно применяя эту формулу, мы придем к интегралу J_1, который мы вычислили. Итак, мы полностью описали процедуру вычисления интеграла от рациональной функции.

<u>**Пример**</u>. Вычислить

$$\int\frac{(2x+4)dx}{(x-1)(x^2+1)^2}.$$

Имеем:

$$\frac{2x+4}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Умножим обе части равенства на $(x-1)(x^2+1)^2$:

$$2x+4 = A(x^2+1)^2 + (M_1x+N_1)(x^2+1)(x-1) + (M_2x+N_2)(x-1).$$

Полагая $x = 1$, найдем $A = \frac{3}{2}$, а при $x = i$ получим уравнение: $2i+4 = (M_2i+N_2)(i-1)$.

Отделяя действительные и мнимые части в этом равенстве, получим:

$$\left.\begin{array}{l} -M_2 + N_2 = 2 \\ -M_2 - N_2 = 4 \end{array}\right\}.$$

Отсюда $M_2 = -3$, $N_2 = -1$. Приравнивая коэффициенты при x^4 и x^3, найдем $M_1 = -A = -\frac{3}{2}$, $N_1 = M_1 = -\frac{3}{2}$.

Таким образом,

$$\int \frac{(2x+4)}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x-1| + \int \frac{(-\frac{3}{2})(x+1)}{x^2+1}\,dx -$$

$$-\int \frac{(3x+1)}{(x^2+1)^2}\,dx .$$ Но $$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1);$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x;$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} .$$

Поэтому

$$\int \frac{(2x+4)\,dx}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\ln(x^2+1) -$$

$$-2\operatorname{arctg} x + \frac{3-x}{2(x^2+1)} + C .$$

§ 8. Интегралы, сводящиеся заменой переменных к интегралам от рациональных функций

Назовем рациональной функцией $R(x,y)$ двух переменных x и y выражение вида $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – полиномы относительно переменных x и y. Отметим следующее очевидное свойство интегралов вида:

$$\int R[f_1(x),\ f_2(x)]\,dx :$$

если при замене переменных $x = \varphi(t)$ функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\frac{dx}{dt}$ являются рациональными функциями переменной t, то интеграл после такой замены сводится к интегралу от рациональной функции переменной t. Это соображение позволяет сводить некоторые типы интегралов от элементарных функций к интегралам от рациональных функций.

А. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

В этом случае удобна замена $t = tg\,\frac{x}{2}$, так как функции

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

являются рациональными функциями переменной t. Для ряда специальных случаев возможны и другие более простые замены переменных. Они основаны на следующих замечаниях. Пусть

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)},$$

где $P(u,v)$, $Q(u,v)$ - полиномы относительно u и v.

I. Если один из полиномов $P(u,v)$, $Q(u,v)$ - четный относительно u, а другой - нечетный, то $R(u,v)$ можно представить в виде:

$$R(u,v) = \frac{u\,P_1(u^2,v)}{Q_1(u^2,v)},$$

где $P_1(\mu,\nu)$, $Q_1(\mu,\nu)$ - полиномы относительно μ и ν.

В этом случае

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{P_1(1-\cos^2 x, \cos x)}{Q_1(1-\cos^2 x, \cos x)} \sin x\,dx.$$

Подстановка $t = \cos x$ приводит интеграл к интегралу от рациональной функции, так как $\sin x\,dx = -d[\cos x] = -dt$.

Аналогично рассуждая, мы приходим к выводу, что в случае, когда один из полиномов $P(u,v)$, $Q(u,v)$ четный относительно v, а другой – нечетный, то подстановка $t = \sin x$ приводит интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ к интегралу от рациональной функции.

2. Пусть теперь полиномы $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ обладают одним из следующих свойств:

а) оба не изменяются при замене u на $-u$, v на $-v$,

б) оба меняют знаки при замене u на $-u$, v на $-v$.

Достаточно рассмотреть лишь первый случай, так как второй сводится к первому умножением числителя и знаменателя в $R(u,v)$ на u или v.

В первом случае имеем:

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)} = \frac{P(\frac{u}{v}\cdot v, v)}{Q(\frac{u}{v}\cdot v, v)} = \frac{P_1(t,v)}{Q_1(t,v)},$$

где $t = \frac{u}{v}$, а $P_1(t,v)$, $Q_1(t,v)$ – полиномы относительно t и v. Из условия вытекает, что полиномы $P_1(t,v)$, $Q_1(t,v)$ – четны относительно v (при фиксированном значении t). Поэтому

$$\frac{P_1(t,v)}{Q_1(t,v)} = \frac{\tilde{P}(t,v^2)}{\tilde{Q}(t,v^2)},$$

где $\tilde{P}(\mu,\nu)$, $\tilde{Q}(\mu,\nu)$ – полиномы относительно μ и ν.

Поэтому $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{\tilde{P}(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)}{\tilde{Q}(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)}\,dx$.

Интеграл сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = \operatorname{tg} x$, так как $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(1+t^2)}$.

В заключение укажем, что интегралы, содержащие произведения тригонометрических функций вида $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, приводятся к интегралам вида $\int \sin \beta x\, dx$, $\int \cos \beta x\, dx$ с помощью формул:

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}\left\{\cos[(\alpha-\beta)x] - \cos[(\alpha+\beta)x]\right\}$$

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left\{\sin[(\alpha+\beta)x] + \sin[(\alpha-\beta)x]\right\}$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left\{\cos[(\alpha+\beta)x] + \cos[(\alpha-\beta)x]\right\}.$$

Б. Интегралы, содержащие линейные и дробно-линейные иррациональности

Рассмотрим интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ при $ad \neq bc$ (n – целое положительное число).

Полагая $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, мы приведем интеграл к интегралу от рациональной функции, так как переменная x (а, следовательно, и $\frac{dx}{dt}$) является рациональной функцией переменной t :

$$x = \frac{dt^n - b}{ct^n - a}.$$

В. Интегралы, содержащие квадратичные иррациональности

Рассмотрим интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$.

Приведение этого интеграла к интегралу от рациональной функции осуществляется с помощью так называемых подстановок Эйлера. В зависимости от знака дискриминанта квадратного трехчлена ax^2+bx+c возможны два случая:

а) $b^2-4ac<0$. В этом случае полином ax^2+bx+c не имеет вещественных корней и потому не меняет знака при изменении x от $-\infty$ до ∞. Он имеет знак коэффициента a, так как при $x\to\infty$ имеем: $ax^2+bx+c=$ $=ax^2[1+O(\frac{1}{x})]$. Чтобы функция $\sqrt{ax^2+bx+c}$ имела смысл, должно быть $a>0$. Положим $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$.

При такой подстановке (первой подстановке Эйлера) переменная x (а, следовательно, и $\frac{dx}{dt}$, и функция $\sqrt{ax^2+bx+c}\equiv$ $\equiv t-x\sqrt{a}$) будут рациональными функциями t. Действительно, $(t-x\sqrt{a})^2=ax^2+bx+c$,

откуда
$$x=\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}};$$

б) $b^2-4ac\geq 0$. Полином ax^2+bx+c в этом случае имеет вещественные корни $x=\alpha$ и $x=\beta$. Положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$ (вторая подстановка Эйлера).

Тогда
$$(x-\alpha)^2t^2=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$
откуда
$$x=\frac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}.$$
При такой подстановке переменная x и функции $\frac{dx}{dt}$, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ будут рациональными функциями переменной t.

Мы рассмотрели общие приемы интегрирования выражений, сводящихся к интегралам от рациональных функций. В частных случаях эти приемы могут приводить к громоздким выкладкам и удобнее иногда прибегать к различным искусственным приемам. Рассмотрим ряд характерных примеров.

<u>Примеры</u>. 1) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt=$

$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+c\qquad (x=a\sin\ \ );$$

2) $\int \frac{1+x^{1/3}}{1+x^{1/4}} dx = \int \frac{1+t^4}{1+t^3} 12t^{11} dt =$

$= 12\int (t^{12} - t^9 + t^8 + t^6 - t^5 + t^2 + 1 - \frac{1+t^2}{1+t^3}) dt =$

$= 12\left[\frac{t^{13}}{13} - \frac{t^{10}}{10} + \frac{t^9}{9} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C$

$(t = x^{1/12})$;

3) $J = \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx - \int \frac{1}{a} e^{ax} (-b \sin bx) dx =$

$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \int \frac{b}{a^2} e^{ax} (b \cos bx) dx =$

$= e^{ax}\left(\frac{1}{a}\cos bx + \frac{b}{a^2} \sin bx\right) - \frac{b^2}{a^2} J .$

Мы дважды использовали интегрирование по частям. Окончательно получаем:

$$J = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} e^{ax}\left(\frac{1}{a}\cos bx + \frac{b}{a^2}\sin bx\right).$$

§ 9. Приближенные формулы для вычисления определенных интегралов

В редких случаях для заданной функции $f(x)$ можно найти первообразную и воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенных интегралов. Будем искать приближенную формулу в виде, аналогичном интегральной сумме:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j) .$$

Если подобрать постоянные λ_j из условия, чтобы эта формула была точной для функций вида x^m $(m=0,1,\dots,n)$, то она будет точной и для произвольной комбинации этих функций, т.е. для произвольного полинома степени не выше n. Полагая $f(x) = x^m$ мы получаем для постоянных λ_j линейную систему из $(n+1)$ уравнения относительно $(n+1)$ неизвестных:

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j^m = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \qquad (m = 0, 1, \dots, n).$$

Определитель этой системы является известным определителем Вандермонда и не равен нулю. Поэтому система имеет единственное решение. Постоянные λ_j можно найти и непосредственно, подставляя в приближенную формулу полином $f(x) = f_j(x) = \prod_{k \neq j} (x - x_k)$.

В результате мы приходим к следующей приближенной формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

где

$$\lambda_j = \int_a^b \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}\,dx.$$

Полученная формула называется квадратурной формулой для вычисления определенного интеграла. Она является точной в случае, если $f(x)$ является полиномом степени не выше n.

Если функция $f(x)$ не удовлетворяет этому условию, то замена определенного интеграла квадратурной формулой приводит к приближенному значению определенного интеграла. При удачном выборе точек квадратурная формула может оказаться точной и для полиномов степени, превышающей n.

Получим оценку погрешности R_n квадратурной формулы, где

$$R_n = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

в предположении, что она является точной для полиномов степени не выше m, а функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $m+1$ при $x \in [a, b]$. Для оценки погрешности рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

и разложим функции $F(x)$ и $f(x)$ по формуле Тейлора с остаточным членом, записанным в интегральной форме:

$$F(x) = F_m(x) + \int_a^x F^{(m+2)}(t)\,\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!}\,dt =$$

$$= F_m(x) + \int_a^x f^{(m+1)}(t)\,\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!}\,dt\,;$$

$$f(x) = f_m(x) + \int_a^x f^{(m+1)}(t)\,\frac{(x-t)^m}{m!}\,dt.$$

Здесь

$$F_m(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Так как $F'(x) = f(x)$ и, следовательно, $F^{(k)}(a) = f^{(k-1)}(a)$, то после замены в выражении для $F_m(x)$ величины k на $k+1$ (с одновременной заменой пределов суммирования) получим:

$$F_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1},$$

т.е.

$$F_m(x) = \int_a^x f_m(t)\,dt\,.$$

Оценим погрешность квадратурной формулы. Имеем:

$$R_n = F(b) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j) = F_m(b) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_m(x_j) +$$

$$+ \int_a^b f^{(m+1)}(t)\,\frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!}\,dt - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^{x_j} f^{(m+1)}(t)\,\frac{(x_j-t)^m}{m!}\,dt.$$

Так как функция $f_m(x)$ является полиномом степени m, а квадратурная формула верна для полиномов такой степени, то

$$F_m(b) = \int_a^b f_m(t)\,dt = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_m(x_j).$$

Поэтому

$$R_n = \int_a^b f^{(m+1)}(t)\,\frac{(b-t)^{m+1}}{(m+1)!}\,dt - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^{x_j} f^{(m+1)}(t)\,\frac{(x_j-t)^m}{m!}\,dt.$$

Для более симметричной записи полученного выражения положим

$$K_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^m}{m!} & \text{при} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^{x_j} f^{(m+1)}(t)\,\frac{(x_j-t)^m}{m!}\,dt = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_a^b K_m(x_j-t)\,f^{(m+1)}(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \Big[\sum_{j=0}^{n} \lambda_j K_m(x_j-t)\Big] f^{(m+1)}(t)\,dt.$$

Поэтому выражение для R_n можно переписать в виде:

$$R_n = \int_a^b \varphi_m(t)\,f^{(m+1)}(t)\,dt,$$

где

$$\varphi_m(t) = K_{m+1}(b-t) - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j K_m(x_j-t).$$

В результате получаем следующую оценку:

$$|R_n| \le \int_a^b |\varphi_m(t) f^{(m+1)}(t)|\,dt \le M_{m+1} \int_a^b |\varphi_m(t)|\,dt .$$

Здесь

$$M_{m+1} = \sup_{t\in[a,b]} |f^{(m+1)}(t)|.$$

Эта оценка является довольно точной, так как она достижима для функции $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$f^{(m+1)}(x) = \operatorname{sign} \varphi_m(x) ,$$

где

$$\operatorname{sign} f(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } f(x) > 0 \\ 0 & \text{при } f(x) = 0 \\ -1 & \text{при } f(x) < 0 \end{cases} .$$

Оценим качественно поведение погрешности R_n при $b \to a$ и фиксированном значении n. Положим $x = a + (b-a)s$ $(0 \le s \le 1)$. Тогда

$$\lambda_j = \int_a^b \frac{\prod\limits_{k\ne j} (x - x_k)}{\prod\limits_{k\ne j} (x_j - x_k)}\,dx = (b-a) \int_0^1 \frac{\prod\limits_{k\ne j} (s - s_k)}{\prod\limits_{k\ne j} (s_j - s_k)}\,ds ,$$

где

$$x_j = a + (b-a)\,s_j \qquad (0 \le s_j \le 1) .$$

Таким образом,

$$\lambda_j = O(b-a) \qquad (b \to a) .$$

Далее,

$$K_m(x-t) = O[(b-a)^m],$$

$$\varphi_m(t) = O[(b-a)^{m+1}], \quad \int_a^b |\varphi_m(t)|\,dt = O[(b-a)^{m+2}],$$

$$R_n = O[(b-a)^{m+2}] \qquad (b \to a).$$

Погрешность R_n быстро уменьшается с уменьшением $(b-a)$. Поэтому часто используются так называемые усложненные квадратурные формулы: интеграл предварительно представляют в виде суммы N интегралов по сегментам $[a_k, a_{k+1}]$ длиной h, где $a_k = a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1,\ h = \frac{b-a}{N})$.

К интегралам

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$$

затем применяют квадратурные формулы рассмотренного выше типа. Погрешность такой квадратурной формулы будет $O[h^{m+2}]$ или, что то же самое, $O\left(\frac{1}{N^{m+2}}\right)(N \to \infty)$. Так как

число интегралов с такой погрешностью будет N, то суммарная погрешность усложненной квадратурной формулы будет

$$O\left(\frac{1}{N^{m+1}}\right) \qquad (N \to \infty).$$

<u>Примеры</u>:

I. <u>Формула прямоугольников</u>

Пусть $n = 0$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$, тогда $\lambda_0 = \int_a^b dx = (b-a)$.

Мы приходим к квадратурной формуле:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Нетрудно проверить, что формула точна для полиномов не выше первой степени. Оценим погрешность. В данном случае наибольшее значение $m=1$,

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{(b-t)^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2} - t\right)(b-a) = \frac{(a-t)^2}{2} & \text{при } t \le \frac{a+b}{2} \\ \frac{(b-t)^2}{2} & \text{при } t > \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

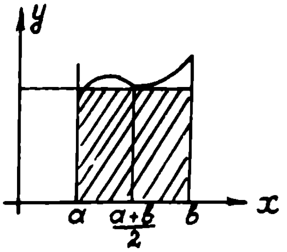
и, следовательно,

$$\int_a^b |\varphi_1(t)|\, dt = \frac{(b-a)^3}{24}.$$

Поэтому получаем следующую оценку ошибки квадратурной формулы:

$$|R_1| \le \frac{(b-a)^3}{24} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|.$$

Укажем простой геометрический смысл формулы прямоугольников при $f(x) > 0$: площадь криволинейной фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и кривой $y=f(x)$, заменяется площадью прямоугольника со сторонами $(b-a)$ и $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (см.рис. 2).



Рис,2

Усложненная квадратурная формула, основанная на формуле прямоугольников, имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)h,$$

где $a_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{N}$.

Оценку погрешности этой формулы легко вывести с помощью полученной выше оценки погрешности формулы прямоугольников:

$$|R| \le \frac{(b-a)^3}{24N^2} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)| .$$

2. Формула трапеций

Пусть $n=1$, $x_0=a$, $x_1=b$. В этом случае

$$\lambda_0 = \int_a^b \frac{(b-x)}{(b-a)} dx = \frac{b-a}{2} , \qquad \lambda_1 = \int_a^b \frac{(x-a)}{(b-a)} dx = \frac{(b-a)}{2} .$$

Поэтому квадратурная формула имеет вид :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right].$$

Она точна для полиномов не выше первой степени.
В данном случае наибольшее возможное значение $m=1$,

$$\varphi_1(t) = \frac{(b-t)^2}{2} - \frac{b-a}{2}(b-t) = -\frac{(b-t)(t-a)}{2} \le 0 ,$$

$$\int_a^b |\varphi_1(t)|dt = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

и мы приходим к следующей оценке погрешности квадратурной формулы:

$$|R_1| \le \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)| .$$

Усложненная квадратурная формула принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(a_k)\right]$$

$$(a_k = a + kh , \quad h = \frac{b-a}{N}),$$

с оценкой погрешности

$$| R | \le \frac{(b-a)^3}{12 N^2} \sup_{t \in [a,b]} | f''(t) | .$$

При вычислении интеграла по формуле трапеции интеграл заменяется площадью трапеции, проведенной через точки:

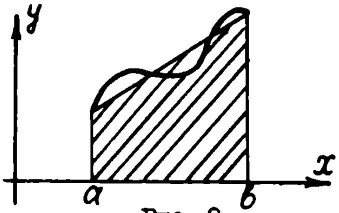


Рис. 3

$$x = a, \quad y = 0,$$
$$x = b, \quad y = 0,$$
$$x = a, \quad y = f(a),$$
$$x = b, \quad y = f(b)$$

(см. рис.3).

3. <u>Формула Симпсона</u>

Пусть $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$.

Тогда

$$\lambda_0 = \int_a^b \frac{(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{(a - \frac{a+b}{2})(a-b)} dx = \frac{b-a}{6},$$

$$\lambda_1 = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b)} dx = \frac{2}{3} (b-a),$$

$$\lambda_2 = \int_a^b \frac{(x-a)(x - \frac{a+b}{2})}{(b-a)(b - \frac{a+b}{2})} dx = \frac{b-a}{6}.$$

Квадратурная формула принимает вид :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

Эта формула называется формулой Симпсона. Можно проверить, что формула Симпсона точна для полиномов вплоть до третьей степени. Поэтому наибольшее возможное значение $m=3$,

$$\varphi_3(t)=\begin{cases} \frac{(b-t)^4}{4!}-\frac{2}{3}\frac{(b-a)(\frac{a+b}{2}-t)^3}{3!}-\frac{b-a}{6}\frac{(b-t)^3}{3!} & \text{при } a\le t\le\frac{a+b}{2} \\ \frac{(b-t)^4}{4!}-\frac{b-a}{6}\frac{(b-t)^3}{3!} & \text{при } \frac{a+b}{2}<t\le b. \end{cases}$$

Для выяснения знака $\varphi_3(t)$ преобразуем полученное выражение:

$$\varphi_3(t)=\begin{cases} \frac{(t-a)^3}{4!}\left[(t-a)-\frac{2(b-a)}{3}\right] & \text{при } a\le t\le\frac{a+b}{2} \\ \frac{(b-t)^3}{4!}\left[(b-t)-\frac{2}{3}(b-a)\right] & \text{при } \frac{a+b}{2}<t\le b. \end{cases}$$

Из этого выражения видно, что $\varphi_3(t)<0$ при $t\in[a,b]$.

Поэтому

$$\int_a^b|\varphi_3(t)|dt=-\int_a^b\varphi_3(t)dt=\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

В результате мы приходим к следующей оценке погрешности формулы Симпсона:

$$|R|\le\frac{(b-a)^5}{2880}\sup_{t\in[a,b]}\left|f^{(4)}(t)\right|.$$

Усложненная квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left[f(a_0)+4f(a_1)+2f(a_2)+4f(a_3)+2f(a_4)+\ldots+\right.$$
$$\left.+4f(a_{2N-1})+f(a_{2N})\right]$$

$$(a_n = a + kh, \qquad h = \frac{b-a}{2N}).$$

Приведем оценку погрешности этой формулы:

$$|R| \le \frac{(b-a)^5}{2880\, N^4} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|.$$

Формула Симпсона является наиболее часто употребляемой из квадратурных формул.

§ 10. Несобственные интегралы

Понятие несобственного интеграла является обобщением понятия определенного интеграла на случай, когда либо подинтегральная функция обращается в бесконечность, либо промежуток интегрирования бесконечен. Рассмотрим это понятие.

Пусть функция $f(t)$ интегрируема на любом сегменте $[a,x]$ при $x < b$ и неограничена в окрестности точки b, или же $b = \infty$. Если существует предел функции $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ при $x \to b$, то этот предел называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ и обозначают через $\int_a^b f(t)\,dt$. Аналогично определяется несобственный интеграл в случае, когда функция $f(t)$ не ограничена в окрестности точки a, или же при $a = -\infty$. Разбивая промежуток интегрирования на ряд промежутков, легко обобщить понятие несобственного интеграла на случай, когда имеется несколько точек, в окрестности которых функция $f(t)$ не ограничена, а также на случай, когда $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Рассмотрим несобственный интеграл $\int_a^b f(t)\,dt$ с единственной особенностью при $x = b$. Для того, чтобы существовал несобственный интеграл, должен существовать предел функции $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ при $x \to b$. Поэтому необхо-

димо и достаточно выполнение условий критерия Коши: если b - конечное число, то при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $|x - b| < \delta$, $|x' - b| < \delta$ имеет место неравенство $|F(x') - F(x)| = \left|\int_x^{x'} f(t)dt\right| < \varepsilon$.

Если $b = +\infty$, то условия критерия Коши имеют вид: при любом $\varepsilon > 0$ существует такое число $c = c(\varepsilon) > 0$, что при $x > c$, $x' > c$ имеет место неравенство

$$\left|\int_x^{x'} f(x)dt\right| < \varepsilon.$$

Исходя из критерия Коши, можно получить простой достаточный признак существования несобственного интеграла - признак сравнения: если $|f(t)| \le \varphi(t)$, при $a \le t < b$ и существует несобственный интеграл $\int_a^b \varphi(t)dt$, то существует также несобственный интеграл $\int_a^b f(t)dt$. Этот признак доказывается с помощью критерия Коши и очевидного неравенства:

$$\left|\int_x^{x'} f(t)dt\right| \le \int_x^{x'} \varphi(t)dt \quad \text{при} \quad x \le x' < b.$$

С помощью доказательства от противного легко установить аналогичный признак расходимости несобственных интегралов: если при $a \le t < b$ выполняется неравенство $f(t) \ge \varphi(t) \ge 0$ и несобственный интеграл $\int_a^b \varphi(t)dt$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(t)dt$ также расходится.

Заметим, что из существования несобственного интеграла $\int_a^b |f(t)|dt$ вытекает существование несобственного интеграла $\int_a^b f(t)dt$. В связи с этим, так же как и для числовых рядов, для несобственных интегралов можно ввести понятия абсолютной и условной сходимости: несобственный интеграл $\int_a^b f(t)dt$ называется абсолютно сходящимся, если существует несобственный

интеграл $\int_a^b |f(t)|dt$; если же несобственный интеграл $\int_a^b f(t)dt$ существует, а несобственный интеграл $\int_a^b |f(t)|dt$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(t)dt$ называется условно сходящимся.

Рассмотрим ряд полезных признаков сходимости несобственного интеграла. Наиболее простой из признаков – следующий: если при $x < b$ интегралы $F(x) = \int_a^x |f(t)|dt$ ограничены (т.е. $\int_a^x |f(t)|dt < c$, где c – некоторая постоянная), то интеграл $\int_a^b f(t)dt$ абсолютно сходится. Действительно, функция $F(x)$ монотонно не убывает и ограничена сверху. Поэтому существует точная верхняя грань

$$J = \sup_{a \le x < b} F(x) .$$

Это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $x = x_0$, что

$$J - \varepsilon < F(x_0) \le J.$$

В силу монотонности функции $F(x)$ при $x_0 < x < b$ имеем ;

$$J - \varepsilon < F(x_0) \le F(x) \le J,$$

т.е.

$$|F(x) - J| < \varepsilon \quad \text{при } b - x < \delta = b - x_0 .$$

Поэтому

$$J = \lim_{x \to b} F(x) = \int_a^b |f(t)|dt ,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению более сложного признака сходимости несобственного интеграла.

Теорема. Если функция $f(t)$ непрерывна, не возрастает и принимает неотрицательные значения при $t \geq 0$, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Так как функция $f(t)$ не возрастает, то при $k \leq t < k+1$ (k - целое неотрицательное число) имеем $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$, откуда $f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.

Поэтому:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Но

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Все величины, входящие в это неравенство, монотонно не убывают с ростом n. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$, то отсюда получаем

$$\int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Поэтому, выбирая при любом x число n из условия $x \leq n$, получим:

$$\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k),$$

т.е. интеграл $\int\limits_0^x f(t)dt$ ограничен сверху и монотонно возрастает. Поэтому несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ сходится.

Предположим теперь, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ сходится. Тогда из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \le \int\limits_0^n f(t)dt < \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$$

вытекает ограниченность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Поэтому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$ сходится. Теорема доказана.

Рассмотренная теорема часто применяется как признак сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$ и называется интегральным признаком Коши сходимости ряда.

Для того, чтобы можно было воспользоваться признаком сравнения для несобственных интегралов или интегральным признаком Коши нужно иметь набор типовых несобственных интегралов, относительно которых известно - сходятся они или расходятся. В качестве таких интегралов удобно использовать интегралы от степенных функций, для которых интегралы $\int\limits_a^x f(t)dt$ при $x < b$ легко вычислить:

если b - конечное число, то интеграл $\int\limits_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \ge 1$; если же $b = +\infty$, то $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Замечания. I. Признак сравнения удобно использовать следующим образом. Пусть $\psi(t) \ge 0$ и $\varphi(t) = O(\psi(t))$ $(t \to b)$ или $\lim\limits_{t \to b} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = c$,

причем интегралы $\int\limits_a^x \varphi(t)dt$, $\int\limits_a^x \psi(t)dt$ существуют при $x < b$. Тогда из существования несобственного интеграла $\int\limits_a^b \psi(t)dt$ вытекает существование несобственного интегра-

ла $\int\limits_a^b \varphi(t)dt$. Это вытекает из оценки $|\varphi(t)| \le C_1\psi(t)$ (C_1 - постоянная), справедливой в некоторой окрестности точки b. Легко сформулировать аналогичный признак расходимости интеграла: если при $\psi(t) \geqslant 0$

$$\lim_{t \to b} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = C$$

и интеграл $\int\limits_a^b \psi(t)dt$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b \varphi(t)dt$

также расходится. Указанные соображения позволяют выяснять вопрос о сходимости несобственного интеграла с помощью выделения главной части в подинтегральной функции при $t \to b$.

2. Иногда для доказательства сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(t)dt$ удобно для интеграла $\int\limits_a^x f(t)dt$ при $x < b$ предварительно воспользоваться интегрированием по частям.

Примеры: I) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha}$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$, так как аналогичными свойствами обладает интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^\alpha}$;

2) докажем, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ сходится при $\alpha > 0$.

Воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}dt = -\frac{\cos t}{t^\alpha}\Big|_1^x - \alpha\int\limits_1^x \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt.$$

Первое слагаемое в правой части равенства имеет предел при $x \to +\infty$, а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}dt$ сходится по признаку сравнения, так как $\left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \le \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}dt$ сходится. Поэтому существует предел интегра-

ла $\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ при $x \to +\infty$;

3) покажем, что интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{t}}{t+\sqrt{t}}\,dt$$

сходится. При $x \to 0$ имеем $\operatorname{arctg} x = O(x)$, поэтому

$$\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{t}}{t+\sqrt{t}} = O\left(\frac{1}{t^2}\right) (t \to +\infty).$$

Интеграл сходится по признаку сравнения, так как сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t^2}$.

§ 11. Определенный и неопределенный интегралы для комплекснозначных и вектор-функций

Так как было определено понятие производной для комплекснозначных и вектор-функций, то можно ввести рассмотренным ранее способом понятие первообразной и неопределенного интеграла. При этом для таких функций имеют место равенства:

а) если $f(x) = U(x) + i V(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int U(x)dx + i\int V(x)dx;$$

б) если $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, то

$$\int f(x)dx = \left(\int f_1(x)dx, \int f_2(x)dx, \ldots, \int f_m(x)dx\right).$$

Понятие определенного интеграла для комплекснозначных и вектор-функций вводится так же, как и для обычных функций, только в соответствующих неравенствах вместо модулей вещественных чисел следует использовать модули комплексных чисел или модули векторов.

При этом сохраняются все свойства определенного интеграла, за исключением теорем сравнения и формул среднего значения, так как операции сравнения для комплексных чисел и векторов не определены. Имеют место равенства:

а) если $f(x) = U(x) + i V(x)$ - комплекснозначная функция, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b U(x)dx + i\int_a^b V(x)dx;$$

б) если $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$,

то $$\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^b f_1(x), \int_a^b f_2(x), \ldots, \int_a^b f_m(x)dx\right).$$

Так как для интегральной суммы, составленной для комплекснозначной и вектор-функции $f(x)$, справедливо неравенство:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

$(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$, то после перехода к пределу при $\Delta \to 0$ ($\Delta = \max \Delta x_i$), получаем то же неравенство, что и для обычных функций:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b).$$

Если $a > b$, то это неравенство имеет вид:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|.$$

Отметим также неравенство Коши-Буняковского для интеграла от произведения комплекснозначных функций

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx} \quad (a<b).$$

Оно вытекает из аналогичного неравенства для интегральной суммы:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, g(\xi_i)\,\Delta x_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\right]\left[g(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}\right]\right| \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|^2 \Delta x_i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |g(\xi_i)|^2 \Delta x_i}$$

Очевидно, неравенство Коши-Буняковского для интеграла остается справедливым и в случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают действительные значения. Пусть теперь $f(x)\cdot g(x)$ - скалярное произведение вектор-функций $f(x)$ и $g(x)$, тогда при $a<b$

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\cdot|g(x)|\,dx \le$$

$$\le \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx}\,.$$

§ 12. Интегралы, зависящие от параметров

Применим результаты, полученные нами при рассмотрении понятий непрерывности и дифференцируемости функций нескольких переменных, для изучения свойств интегралов вида:

$$J(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy \quad ,$$

где

$$x = (x_1, \dots , x_m) .$$

Интегралы такого вида называются интегралами, зависящими от параметров $x_1, \dots, x_m$.

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ $(x = (x_1 \dots x_m))$ непрерывна на множестве $a \le y \le b$, $x \in A$, где A – замкнутое ограниченное множество. Тогда интеграл

$$J(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$$

является непрерывной функцией на множестве A .

Доказательство. Функция $f(x,y)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $a \le y \le b$, $x \in A$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$,

что $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon_1$, если $\sqrt{|x-x'|^2 + |y-y'|^2} < \delta$.

В частности, при $y' = y$ имеем: $|f(x,y) - f(x',y)| < \varepsilon_1$, если $x, x' \in A$, $|x - x'| < \delta$.

Отсюда $|J(x) - J(x')| = |\int_a^b [f(x,y) - f(x',y)]dy| \le$

$\le |\int_a^b |f(x,y) - f(x',y)|dy| < \varepsilon_1 |b-a|$ при $x, x' \in A$, $|x - x'| < \delta$.

При любом $\varepsilon > 0$ выберем ε_1 из условия $\varepsilon_1 |b - a| = \varepsilon$. Тогда при $x, x' \in A$, $|x - x'| < \delta$ выполняется неравенство $|J(x) - J(x')| < \varepsilon$, т.е. функция $J(x)$ непрерывна на множестве A. Теорема доказана.

__Теорема.__ Пусть $J(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$,

причем функция $f(x,y)$ и частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}$ $(x = (x_1, \ldots, x_m))$ непрерывны при $a \le y \le b$, $x \in A$, где A - выпуклое замкнутое ограниченное множество. Тогда на множестве A существует частная производная $\frac{\partial J(x)}{\partial x_k}$ и ее можно вычислять, производя дифференцирование под знаком интеграла, т.е.

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_k} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}\,dy .$$

__Доказательство.__ Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta_k J(x)}{\Delta x_k} = \frac{J(x+\Delta_k x) - J(x)}{\Delta x_k},$$

соответствующее изменению лишь одной переменной x_k.

Имеем:

$$\frac{\Delta_k J(x)}{\Delta x_k} = \int_a^b \frac{f(x+\Delta_k x, y) - f(x,y)}{\Delta x_k}\, dy.$$

Так как множество A выпуклое, то при фиксированном значении y можно воспользоваться формулой Лагранжа конечных приращений:

$$f(x+\Delta_k x, y) - f(x,y) = \frac{\partial f(x+t\Delta_k x, y)}{\partial x_k}\,\Delta x_k,$$

где $0 < t < 1$.

Поэтому

$$\frac{\Delta_k J(x)}{\Delta x_k} = \int_a^b \frac{\partial f(x+t\Delta_k x, y)}{\partial x_k}\, dy, \quad (0 < t < 1).$$

Так как функция $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что

$$\left| \frac{\partial f(x',y')}{\partial x_k} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k} \right| < \varepsilon_1, \quad \text{если} \quad \sqrt{|x'-x|^2 + |y'-y|^2} < \delta.$$

Полагая $x' = x + t\Delta_k x$, $y' = y$, получим:

$$\left| \frac{\partial f(x+t\Delta_k x, y)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k} \right| < \varepsilon_1, \quad \text{если} \quad |\Delta x_k| < \delta,$$

так как в этом случае

$$|x'-x| = |t\Delta_k x| = t|\Delta_k x| = t|\Delta x_k| < \delta .$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\Delta_k J(x)}{\Delta x_k} - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}dy\right| = \left|\int_a^b\left[\frac{\partial f(x+t\Delta_k x,y)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}\right]dy\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^b\left|\frac{\partial f(x+t\Delta_k x,y)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}\right|dy\right| < \varepsilon_1|b-a|, \text{ если } |\Delta x_k|<\delta.$$

Выбирая при заданном значении ε величину ε_1 из условия $\varepsilon_1 |b-a| = \varepsilon$, получим, что

$$\left|\frac{\Delta_k J(x)}{\Delta x_k} - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}dy\right| < \varepsilon, \text{ если } |\Delta x_k| < \delta.$$

Это означает, что существует предел $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_k J(x)}{\Delta x_k} = \frac{\partial J(x)}{\partial x_k}$, причем $\frac{\partial J(x)}{\partial x_k} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}dy$. Теорема доказана.

Если $m=1$, то в качестве множества A в рассмотренных теоремах можно взять сегмент $c \le x \le d$.

Рассмотрим теперь интегралы вида

$$J(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy ,$$

для которых пределы интегрирования сами зависят от параметров $x=(x_1, \ldots, x_m)$.

Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $f(x,y)$ непрерывны при $a \le y \le b$, $x \in A$, где A – замкнутое ограниченное множество и $a \le \alpha(x) \le b$, $a \le \beta(x) \le b$. Покажем, что интеграл $J(x)$ является непрерывной функцией на множе-

стве A. Имеем:

$$J(x+\Delta x)-J(x)=\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)}[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]dy+$$

$$+\int\limits_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)}f(x+\Delta x,y)dy-\int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)}f(x,y)dy.$$

По теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)}[f(x+\Delta x,y)-f(x,y)]dy=0.$$

Оценим оставшиеся слагаемые. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве, т.е. $|f(x,y)|\le C$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)}f(x,y)dy\right|\le\left|\int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)}|f(x,y)|dy\right|\le C\,|\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)|,$$

откуда, в силу непрерывности функции $\alpha(x)$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(x+\Delta x)}f(x,y)dy=0.$$

Аналогично получаем равенство:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\int\limits_{\beta(x)}^{\beta(x+\Delta x)}f(x,y)dy=0.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}[J(x+\Delta x)-J(x)]=0,$$

т.е. функция $J(x)$ непрерывна на множестве A. Рассмотрим теперь вопрос о вычислении производных функции $J(x)$, предполагая, что $f(x,y)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ имеют непрерывные частные производные на множестве $a \le y \le b$, $x \in A$, где A - замкнутое ограниченное выпуклое множество. Имеем:

$$J(x) = \varphi(x, \alpha(x), \beta(x)),$$

где

$$\varphi(x, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dy.$$

По доказанной выше теореме

$$\frac{\partial \varphi(x,t_1,t_2)}{\partial x_k} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}\,dy.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \varphi(x,t_1,t_2)}{\partial t_1} = -f(x,t_1), \quad \frac{\partial \varphi(x,t_1,t_2)}{\partial t_2} = f(x,t_2).$$

Из этих выражений вытекает, что функция $\varphi(x, t_1, t_2)$ имеет непрерывные частные производные, если $x \in A$, $a \le t_1 \le b$, $a \le t_2 \le b$. Поэтому функция $\varphi(x, t_1, t_2)$ дифференцируема на этом множестве. По правилу дифференцирования сложной функции, которым в данном случае можно воспользоваться, имеем:

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_k} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial t_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial t_2}{\partial x_k}\right]_{t_1=\alpha(x),\ t_2=\beta(x)},$$

т.е.

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_k} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}\,dy + f(x,\beta(x))\,\frac{\partial \beta(x)}{\partial x_k} -$$

$$-f(x,\alpha(x))\,\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_k}\,.$$

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании по параметру интегралов, зависящих от параметра.

<u>Теорема</u>. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна при $c\le x\le d$, $a\le y\le b$ и $J(x)=\int_a^b f(x,y)\,dy$.

Тогда при вычислении интеграла $\int_c^d J(x)\,dx$ можно производить интегрирование по параметру по знаком интеграла, определяющего функцию $J(x)$, т.е.

$$\int_c^d J(x)\,dx=\int_a^b dy\left[\int_c^d f(x,y)\,dx\right].$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим на сегменте $[c,d]$ следующую функцию переменной t:

$$\varphi(t)=\int_c^t J(x)\,dx-\int_a^b dy\left[\int_c^t f(x,y)\,dx\right].$$

Имеем:

$$\varphi'(t)=J(t)-\frac{d}{dt}\left\{\int_a^b dy\left[\int_c^t f(x,y)\,dx\right]\right\}.$$

По теореме о дифференцировании интегралов, зависящих от параметра, получим:

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_a^b dy\left[\int_c^t f(x,y)\,dx\right]\right\}=\int_a^b dy\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_c^t f(x,y)\,dx\right]=$$

$$=\int_a^b f(t,y)\,dy=J(t).$$

Поэтому $\varphi'(t)=0$ и, следовательно, $\varphi(t)=const$ при $c \le t \le d$. Но $\varphi(c)=0$, поэтому $\varphi(t)\equiv 0$, т.е.

$$\int_c^t J(x)dx = \int_a^b dy\left[\int_c^t f(x,y)dx\right].$$

Для доказательства теоремы остается положить в этом равенстве $t=b$.

Рассмотрим теперь несобственные интегралы, зависящие от параметров. Пусть

$$J(x)=\int_a^b f(x,y)dy.$$

Если этот интеграл сходится при фиксированном значении x, то говорят, что несобственный интеграл $J(x)$ сходится в точке x. Если он сходится при всех $x\in A$, то говорят, что несобственный интеграл сходится на множестве A. Введем понятие равномерной сходимости несобственного интеграла. Для определенности будем считать, что единственная особенность подынтегрального выражения находится при $y=b$.

<u>Определение.</u> Интеграл $\int_a^b f(x,y)dy$ называется равномерно сходящимся на множестве A к функции $J(x)$, если при любом $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что

$$\left|\int_a^{\bar y} f(x,y)dy - J(x)\right| < \varepsilon \quad \text{при } 0<b-\bar y<\delta \text{ и всех } x\in A.$$

Мы сформулировали понятие равномерной сходимости для случая, когда b является конечным числом. Видоизменение этого определения на случай, когда $b=+\infty$ очевидно (вместо $\delta=\delta(\varepsilon)$ следует использовать $c=c(\varepsilon)>0$, а вместо неравенства $0<b-\bar y<\delta$ использовать неравенство $\bar y>c$).

<u>Теорема (критерий Коши).</u> Для того, чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dy$ равномерно сходился на множестве

A необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon$

при $0 < b - y_1 < \delta$, $0 < b - y_2 < \delta$, $x \in A$.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dy$ равномерно сходится к функции $J(x)$.

Тогда при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что

$$\left|\int\limits_a^{\bar y} f(x,y)\,dy - J(x)\right| < \varepsilon_1 ,$$

если $0 < b - \bar y < \delta$, $x \in A$.

В таком случае при $0 < b - y_1 < \delta$, $0 < b - y_2 < \delta$ имеем:

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right| = \left|\left[\int\limits_a^{y_2} f(x,y)\,dy - J(x)\right] - \left[\int\limits_a^{y_1} f(x,y)\,dy - J(x)\right]\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_a^{y_2} f(x,y)\,dy - J(x)\right| + \left|\int\limits_a^{y_1} f(x,y)\,dy - J(x)\right| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 .$$

Выберем при любом $\varepsilon > 0$ число ε_1 из условия $2\varepsilon_1 = \varepsilon$. Тогда

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon \qquad \text{при } 0 < b - y_1 < \delta,\ 0 < b - y_2 < \delta,$$

т.е. выполнены условия критерия Коши.

<u>Достаточность</u>. Пусть при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon_1)$, что

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon_1$$

при $0 < b - y_1 < \delta$, $0 < b - y_2 < \delta$, $x \in A$.

В таком случае при фиксированном значении x выполнены условия критерия Коши сходимости несобственного интеграла к некоторому значению $J(x)$. По теореме сравнения для предела функции имеем:

$$\left|\int_a^{y_1} f(x,y)\,dy - J(x)\right| = \lim_{y_2 \to b}\left|\int_a^{y_1} f(x,y)\,dy - \int_a^{y_2} f(x,y)\,dy\right| =$$

$$= \lim_{y_2 \to b}\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right| \le \varepsilon_1,$$

если $0 < b - y_1 < \delta$, $x \in A$.

Выбирая при любом $\varepsilon > 0$ число ε_1 из условия $\varepsilon_1 < \varepsilon$, получим, что

$$\left|\int_a^{y_1} f(x,y)\,dy - J(x)\right| < \varepsilon \qquad \text{при } b - y_1 < \delta(\varepsilon),\ x \in A,$$

что и означает равномерную сходимость интеграла $\int_a^b f(x,y)\,dy$ к функции $J(x)$. Теорема доказана.

Отметим следующий признак сравнения для равномерной сходимости: если $|f(x,y)| \le \varphi(y)$ при $x \in A$, $a < y < b$ и интеграл $\int_a^b \varphi(y)\,dy$ сходится, то интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dy$ сходится равномерно на множестве A. Это вытекает из неравенства

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\right| \le \int\limits_{y_1}^{y_2} |f(x,y)|dy \le \int\limits_{y_1}^{y_2} \varphi(y)dy, \ (y_1 \le y_2)$$

и критерия Коши для интеграла $\int\limits_a^b \varphi(y)\,dy$.

Для равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметров, остаются справедливыми доказанные ранее теоремы.

<u>Теорема</u>. Пусть функция $f(x,y)$, $(x=(x_1,\dots,x_m))$ непрерывна на множестве $a \le y < b$, $x \in A$, где A – замкнутое ограниченное множество, а интеграл $J(x)=\int\limits_a^b f(x,y)dy$ равномерно сходится на множестве A. Тогда интеграл $J(x)$ на множестве A является непрерывной функцией.

<u>Доказательство</u>. Так как несобственный интеграл $J(x)$ равномерно сходится на множестве A, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\bar{y} < b$, что $|\bar{J}(x)-J(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, при $x \in A$, где $\bar{J}(x)=\int\limits_a^{\bar{y}} f(x,y)\,dy$.

Поэтому при $x, x' \in A$ имеем:

$$|J(x)-J(x')| = |[J(x)-\bar{J}(x)]+[\bar{J}(x')-J(x')]+[\bar{J}(x)-\bar{J}(x')]| \le$$

$$\le |J(x)-\bar{J}(x)|+|J(x')-\bar{J}(x')|+|\bar{J}(x)-\bar{J}(x')| < \frac{2\varepsilon}{3}+|\bar{J}(x)-\bar{J}(x')|.$$

Так как интеграл $\bar{J}(x)$ не имеет особенностей в подинтегральном выражении и функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $a \le y \le \bar{y}$, $x \in A$, то функция $\bar{J}(x)$ непрерывна на множестве A. Поэтому найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что $|\bar{J}(x)-J(x')| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|x-x'|<\delta$, откуда при $|x-x'|<\delta$ имеем $|J(x)-J(x')|<\varepsilon$.

Следовательно, функция $J(x)$ непрерывна на множестве A.

Теорема. Пусть функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}$ $(x=(x_1, \ldots, x))$ непрерывны при $a \le y < b$, $x \in A$, где A – замкнутое ограниченное выпуклое множество, а интегралы $J(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$

и

$$S(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}\,dy$$

сходятся равномерно на множестве A. Тогда на множестве A существует частная производная $\frac{\partial J(x)}{\partial x_k}$ и ее можно вычислять, производя дифференцирование под знаком интеграла, т.е.

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_k} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k}\,dy .$$

Доказательство. Докажем равномерную сходимость интегралов

$$\int_a^b \frac{f(x+\Delta_k x, y) - f(x,y)}{\Delta x_k}\,dy ,$$

соответствующих изменению одной переменной x_k.

По формуле Лагранжа конечных приращений при $y_1 < y_2 < b$ имеем:

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x+\Delta_k x, y)\,dy - \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy = \Delta x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\int_{y_1}^{y_2} f(x+t\Delta_k x, y)\,dy\Big] =$$

$$= \Delta x_k \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x+t\Delta_k x, y)}{\partial x_k}\,dy .$$

Здесь число t не зависит от y и удовлетворяет неравенству $0 < t < 1$. Так как интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k} dy$ равномерно сходится, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\left| \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k} dy \right| < \varepsilon$, если $b - y_1 < \delta$, $b - y_2 < \delta$, $x \in A$. Поэтому при $b - y_1 < \delta$, $b - y_2 < \delta$, $x, x + \Delta_k x \in A$ имеем:

$$\left| \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{f(x+\Delta_k x, y) - f(x,y)}{\Delta x_k} dy \right| = \left| \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f(x + t\Delta_k x, y)}{\partial x_k} dy \right| < \varepsilon,$$

т.е. интеграл

$$\frac{J(x+\Delta_k x) - J(x)}{\Delta x_k} = \int\limits_a^b \frac{f(x+\Delta_k x, y) - f(x,y)}{\Delta x_k} dy$$

равномерно сходится относительно $\Delta_k x$.

В силу равномерной сходимости интегралов $\frac{J(x+\Delta_k x) - J(x)}{\Delta x_k}$ и $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k} dy$, при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\bar{y}$, что

$$\left| \frac{J(x+\Delta_k x) - J(x)}{\Delta x_k} - \frac{\bar{J}(x+\Delta_k x) - \bar{J}(x)}{\Delta x_k} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|S(x) - \bar{S}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad x \in A, \ (x + \Delta_k x) \in A,$$

где $\bar{J}(x) = \int\limits_a^{\bar{y}} f(x,y)\,dy$, $\quad \bar{S}(x) = \int\limits_a^{\bar{y}} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_k} dy$.

Поэтому

$$\left|\frac{J(x+\Delta_k x)-J(x)}{\Delta x_k} - S(x)\right| = \left|\left[\frac{J(x+\Delta_k x)-J(x)}{\Delta x_k} - \frac{\bar{J}(x+\Delta_k x)-\bar{J}(x)}{\Delta x_k}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\bar{S}(x) - S(x)\right] + \left[\frac{\bar{J}(x+\Delta_k x)-\bar{J}(x)}{\Delta x_k} - \bar{S}(x)\right]\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{J(x+\Delta_k x)-J(x)}{\Delta x_k} - \frac{\bar{J}(x+\Delta_k x)-\bar{J}(x)}{\Delta x_k}\right| + \left|\bar{S}(x) - S(x)\right| +$$

$$+ \left|\frac{\bar{J}(x+\Delta_k x)-\bar{J}(x)}{\Delta x_k} - \bar{S}(x)\right| < \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\frac{\bar{J}(x+\Delta_k x)-\bar{J}(x)}{\Delta x_k} - \bar{S}(x)\right| .$$

Подинтегральное выражение в интеграле $\bar{J}(x)$ не содержит особенностей и к интегралу $\bar{J}(x)$ применима теорема о дифференцировании интегралов, зависящих от параметров. Поэтому существует предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\bar{J}(x+\Delta_k x)-\bar{J}(x)}{\Delta x_k} = \frac{\partial \bar{J}(x)}{\partial x_k} ,$$

равный $\bar{S}(x)$. Следовательно, можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ что

$$\left|\frac{\bar{J}(x+\Delta_k x)-\bar{J}(x)}{\Delta x_k} - \bar{S}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} , \qquad \text{если } |\Delta x_k| < \delta .$$

Таким образом, при $|\Delta x_k| < \delta$ имеем:

$$\left|\frac{J(x+\Delta_k x)-J(x)}{\Delta x_k} - S(x)\right| < \varepsilon ,$$

т.е. существует предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{J(x+\Delta_k x) - J(x)}{\Delta x_k} = \frac{\partial J(x)}{\partial x_k},$$

равный $S(x)$. Теорема доказана.

<u>Теорема</u>. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна при $c \le x \le d$, $a \le y < b < \infty$, а несобственный интеграл

$$J(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy$$

сходится равномерно на сегменте $[c, d]$.

Тогда $\int_c^d J(x) dx = \int_a^b dy \left[\int_c^d f(x, y)\, dx \right]$.

<u>Доказательство</u>. Так как интеграл $J(x)$ сходится равномерно на сегменте $[c, d]$, то он является непрерывной функцией на этом сегменте и потому интеграл $\int_c^d J(x)\, dx$ существует. В силу равномерной сходимости интеграла $J(x)$, при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое число $\bar{y} < b$, что $|J(x) - \bar{J}(x)| < \varepsilon_1$, где

$$\bar{J}(x) = \int_a^{\bar{y}} f(x, y)\, dy \qquad (c \le x \le d).$$

Но $\int_c^d J(x)\, dx = \int_c^d \bar{J}(x)\, dx + \alpha$,

где $\alpha = \int_c^d [J(x) - \bar{J}(x)]\, dx$.

Оценим величину α :

$$|\alpha| \le \int_c^d |J(x) - \bar{J}(x)| dx < \varepsilon_1 (d-c) .$$

Выберем при любом $\varepsilon > 0$ величину ε_1 из условия $\varepsilon_1 (d-c) = \varepsilon$. Тогда $|\alpha| < \varepsilon$. Далее,

$$\int_c^d \bar{J}(x) dx = \int_a^{\bar{y}} dy \left[\int_c^d f(x, y) dx \right] .$$

Откуда

$$\left| \int_c^d J(x) dx - \int_a^{\bar{y}} dy \left[\int_c^d f(x, y) dx \right] \right| = |\alpha| < \varepsilon .$$

Это и означает, что

$$\int_c^d J(x) dx = \int_a^{b} dy \left[\int_c^d f(x, y) dx \right] ,$$

где последний интеграл понимается как несобственный. Теорема доказана. Случай $b = +\infty$ в доказанных теоремах рассматривается аналогично.

Мы рассмотрели некоторые операции над интегралами, зависящими от параметров. Все рассмотренное нами легко обобщается на случай, когда подинтегральное выражение является комплексно-значной или вектор-функцией.

Операции над интегралами, зависящими от параметров, позволяют иногда получать аналитические выражения для интегралов. Рассмотрим характерный пример. Вычислим интеграл

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx , \qquad \alpha > 0 .$$

Так как в силу оценки $\left| e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \right| \le e^{-\delta x}$, $\left| e^{-\alpha x} \sin x \right| \le e^{-\delta x}$ $(\alpha \ge \delta > 0)$ интеграл $J(\alpha)$ и интеграл $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx$

сходятся равномерно при $\alpha \geq \delta > 0$ и любом δ, то в интеграле можно производить дифференцирование по параметру под знаком интеграла:

$$J'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x \, dx = Jm\left[\int_0^\infty e^{-(\alpha + i)x} dx\right] =$$

$$= Jm\left[\frac{1}{\alpha + i}\right] = -\frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Интегрируя полученное соотношение и учитывая, что $\lim_{\alpha \to \infty} J(\alpha) = 0$, имеем:

$$J(\alpha) = \int_\alpha^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_\alpha^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha.$$

Глава 7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Определение и основные свойства функциональных последовательностей

Наряду с числовыми последовательностями, в анализе широко применяются так называемые функциональные последовательности, т.е. последовательности $\{f_n(x)\}$ функций, заданных на множестве A. Будем называть функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ ограниченной на множестве A, если найдется такое число $C>0$, что $|f_n(x)| \le C$ при $x \in A$ и любых значениях n. Если мы значение переменной x зафиксируем, то возникает числовая последовательность $\{f_n(x)\}$. Если эта последовательность сходится, то говорят о сходимости функциональной последовательности в данной точке x. Если функциональная последовательность сходится при всех значениях $x \in A$, то говорят, что функциональная последовательность сходится на множестве A. При этом предел очевидно зависит от x, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in A.$$

Кроме понятия сходимости функциональной последовательности на множестве A удобным является понятие равномерной сходимости на множестве A.

<u>Определение</u>. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве A к функции $f(x)$, если при любом $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N=N(\varepsilon)$, что при $n \ge N$ имеют место неравенства $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ для любых значений $x \in A$.

Отличие равномерной сходимости от обычной состоит в дополнительном требовании независимости от переменной x номера N.

<u>Пример</u>. Функция $f_n(x) = x^n$ сходится к нулю при

$n \to \infty$ на интервале $(0,1)$ неравномерно, так как при $x = x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ имеем $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$ для любого n и неравенство $|f_n(x)| < \varepsilon$ при $n \geq N$, $x \in (0,1)$ не может быть выполнено, если, например $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости). Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве A сходилась к некоторой функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ можно было найти такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при $m \geq N$, $n \geq N$, $x \in A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве A сходится к функции $f(x)$, т.е. при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon_1)$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$ при $n \geq N(\varepsilon_1)$. Но в таком случае при $n \geq N$, $m \geq N$, $x \in A$ имеем:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |[f_n(x) - f(x)] + [f(x) - f_m(x)]| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 2\varepsilon_1 .$$

Выбирая при любом $\varepsilon > 0$ число ε_1 из условия $2\varepsilon_1 = \varepsilon$, получим, что при $n \geq N(\varepsilon)$, $m \geq N(\varepsilon)$, $x \in A$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть выполнен критерий Коши, т.е. при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon_1)$, что $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1$ при $n \geq N$, $m \geq N$, $x \in A$.

Тогда при каждом значении x выполнен критерий Коши сходимости числовой последовательности $\{f_n(x)\}$, т.е. существует предел

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in A.$$

Переходя в критерии Коши к пределу при $n \to \infty$, получим по теореме сравнения для пределов: $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1$ при $n \geq N(\varepsilon_1)$, $x \in A$. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ произвольное число и положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $n \geq N(\varepsilon)$, $x \in A$ имеем $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве A к функции $f(x)$ равномерно. Теорема доказана.

Теорема (об изменении порядка предельного перехода). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве A равномерно к функции $f(x)$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n$. Тогда существует также предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, причем $b = \lim b_n$.

Утверждение теоремы можно кратко записать в виде:

$$\lim_{x \to a} \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to a} f_n(x) \right],$$

т.е. для равномерно сходящихся последовательностей порядки выполнения предельного перехода по номеру n и переменной x можно переставлять местами.

Доказательство. Так как функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве A, то при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon_1)$, что при $n \geq N$, $m \geq N$, $x \in A$ имеют место неравенства $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon_1$. Переходя в этом соотношении к пределу при $x \to a$, по теореме сравнения для предела функции получим $|b_n - b_m| \leq \varepsilon_1$ при $n \geq N$, $m \geq N$. Если при любом $\varepsilon > 0$ выбрать ε_1 из условия $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то при $n \geq N$, $m \geq N$ имеем $|b_n - b_m| < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{b_n\}$, согласно критерию Коши, сходится

при $n \to \infty$ к некоторому числу b. Если перейти к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве $|b_n - b_m| \leq \varepsilon_1$, то получим неравенство $|b_n - b| \leq \varepsilon_1$ при $n \geq N$. Покажем, что существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, равный b, где

$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Из неравенства $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ при $n \geq N$, $m \geq N$, $x \in A$ в пределе при $m \to \infty$ получаем:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1 \quad \text{при } n \geq N,\ x \in A.$$

Поэтому

$$|f(x) - b| = |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - b_n] + [b_n - b]| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + |f_n(x) - b_n| \quad \text{при } n \geq N(\varepsilon_1),\ x \in A.$$

Зафиксируем номер n, удовлетворяющий неравенству $n \geq N(\varepsilon_1)$. Так как $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n$, то при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что при $|x - a| < \delta$ имеет место неравенство $|f_n(x) - b_n| < \varepsilon_1$. Отсюда при $|x - a| < \delta$ имеем $|f(x) - b| < 3\varepsilon_1$.

Выбирая при любом $\varepsilon > 0$ величину ε_1 из условия $3\varepsilon_1 = \varepsilon$ получим, что при $|x - a| < \delta$ имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных в точке $x = a$ функций сходится равномерно на множестве A к функции $f(x)$, причем $a \in A$. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

Действительно, по предыдущей теореме имеем:

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right].$$

Но

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a), \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, что и требовалось доказать.

§ 2. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей

Пусть на сегменте $[a,b]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторой функции $f(x)$. Рассмотрим условия, при которых из дифференцируемости или интегрируемости функций $f_n(x)$ вытекает дифференцируемость или интегрируемость функции $f(x)$ и справедливость соотношений:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x), \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Если какое-либо из этих соотношений выполняется, то говорят, что функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ можно почленно дифференцировать или интегрировать соответственно.

<u>Теорема</u> (о возможности почленного дифференцирования функциональной последовательности). Пусть каждая из функций последовательности $\{f_n(x)\}$ дифференцируема на $[a,b]$, причем последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$, то она сходится всюду на $[a,b]$ к некоторой дифференцируемой функции $f(x)$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

Доказательство. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad (\Delta x = x - x_0)$$

. Покажем, что функциональная последовательность $\left\{ \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} \right\}$ равномерно сходится на сегменте $[a, b]$. Для этого покажем, что выполняются условия критерия Коши равномерной сходимости. Имеем;

$$\frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta f_m(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta [f_n(x) - f_m(x)]}{\Delta x} .$$

По формуле Лагранжа для конечных приращений имеем:

$$\frac{\Delta [f_n(x) - f_m(x)]}{\Delta x} = \frac{d}{dx}\left[f_n(x) - f_m(x)\right]\Bigg|_{x=\xi} = f_n'(\xi) - f_m'(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x)$.

Так как последовательность $\{f_n'(x)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n \geq N, m \geq N$, $\xi \in [a, b]$ выполняются неравенства $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon$. Поэтому

$$\left| \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta f_m(x)}{\Delta x} \right| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N,\ m \geq N,\ x \in [a, b],$$

т.е. последовательность $\left\{ \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} \right\}$ равномерно сходится на сегменте $[a, b]$. Поэтому из равенства $f_n(x) = f_n(x_0) + \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} \Delta x$ и сходимости последовательности $\{ f_n(x) \}$ при $x = x_0$ вытекает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ при

$$x \in [a, b] : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) .$$

Следовательно, число x_0 , содержащееся в условии теоремы оказывается любым. С другой стороны, в силу равномерной сходимости последовательности $\left\{ \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} \right\}$ и сходимости

последовательности $\{f_n(x)\}$ при $x \in [a,b]$, имеем:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x}\right],$$

т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0).$$

Из этого равенства вытекает, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.

Напомним, что x_0 – любая точка, принадлежащая сегменту $[a,b]$. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> (о возможности почленного интегрирования функциональной последовательности). Пусть каждая из функций последовательности $\{f_n(x)\}$ интегрируема по Риману на сегменте $[a,b]$. Если эта последовательность сходится равномерно на сегменте $[a,b]$ к некоторой функции $f(x)$, то функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a,b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

<u>Доказательство</u>. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a,b]$ при любом $\varepsilon_1>0$ найдется такой номер $N=N(\varepsilon_1)$, что

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon_1 \quad \text{при } n\geq N,\quad x\in[a,b].$$

Зафиксируем номер n, удовлетворяющий условию $n\geq N$. Так как функция $f_n(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a,b]$, то найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon_1)$, что для произвольного разбиения R сегмента $[a,b]$ на m частичных сегментов при $\Delta<\delta$ выполняется неравенство:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_{i,n} \cdot \Delta x_i < \varepsilon_1 .$$

Здесь $\Delta = \max \Delta x_i$, $\omega_{i,n} = \sup\limits_{x,x' \in [x_i , x_{i+1}]} |f_n(x) - f_n(x')|$ - колебание функции $f_n(x)$ на сегменте $[x_i , x_{i+1}]$.

Пусть $\omega_i = \sup\limits_{x,x' \in [x_i , x_{i+1}]} |f(x) - f(x')|$ - колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_i , x_{i+1}]$. Оценим сумму $\sum\limits_{i=0}^{m-1} \omega_i \Delta x_i$.

Если $x, x' \in [x_i , x_{i+1}]$, то

$$|f(x) - f(x')| = |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(x')] + [f_n(x') - f(x')]| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x') - f(x')| + |f_n(x) - f_n(x')| \leq 2\varepsilon_1 + \omega_{i,n} .$$

Поэтому $\omega_i \leq 2\varepsilon_1 + \omega_{i,n}$, и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \Delta x_i < 2\varepsilon_1 (b-a) + \varepsilon_1 .$$

Пусть теперь при произвольном $\varepsilon > 0$ число ε_1 выбрано из условия $2\varepsilon_1 (b-a) + \varepsilon_1 = \varepsilon$. Тогда при $\Delta < \delta$ имеем :

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon , \qquad \text{т.е.} \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \Delta x_i = 0 .$$

Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$. Если $n \geq N(\varepsilon_1)$, то

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \varepsilon_1 (b-a) < \varepsilon ,$$

т.е. $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx.$

Теорема доказана.

§ 3. Функциональные ряды

Рассмотрим ряд $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$, где функции $\varphi_k(x)$ заданы на некотором множестве A. Ряд называется равномерно сходящимся на множестве A к некоторой функции $f(x)$, определенной на множестве A, если последовательность частичных сумм $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k(x)$ равномерно сходится на множестве A к функции $f(x)$. Из критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности вытекает соответствующий критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда: для того, чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ равномерно сходился на множестве A, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n \geqslant m \geqslant N(\varepsilon)$, $x \in A$ имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=m}^{n} \varphi_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Укажем простой признак равномерной сходимости функционального ряда: пусть $|\varphi_k(x)| \leq a_k$ при $x \in A$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится; тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ сходится равномерно на множестве A. Справедливость этого утверждения вытекает из критерия Коши сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и

неравенства $\left|\sum_{k=m}^{n}\varphi_k(x)\right| \le \sum_{k=m}^{n}\left|\varphi_k(x)\right| \le \sum_{k=m}^{n} a_k$.

Мы связали вопрос о сходимости ряда с вопросом о сходимости последовательности. Можно рассмотреть и обратное соответствие – каждой функциональной последовательности поставить в соответствие ряд и из признаков сходимости ряда получить соответствующие признаки сходимости последовательности. Действительно, пусть

$\{f_n(x)\}$ – некоторая функциональная последовательность.

Рассмотрим ряд $f_0(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_{k+1}(x)-f_k(x)\right]$. Частичная

сумма этого ряда с номером $n-1$ будет

$$f_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\left[f_{k+1}(x)-f_k(x)\right]=f_n(x).$$

Поэтому сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ будет вытекать из сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_{k+1}(x)-f_k(x)\right].$$

Отсюда получаем простой признак равномерной сходимости функциональной последовательности: пусть выполняются неравенства

$|f_{k+1}(x)-f_k(x)|\le a_k$ при $x\in A$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$

сходится. Тогда функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве A .

Переформулируем для функциональных рядов теоремы, доказанные нами для функциональных последовательностей.

1. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)$ при $x\in A$ равномерно

сходится к некоторой функции $f(x)$ и существуют пределы

$\lim\limits_{x \to a} \varphi_k(x) = b_k$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ сходится и существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, причем

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x \to a} \varphi_k(x);$$

2. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ при $x \in A$ равномерно сходится к некоторой функции $f(x)$, а функции $\varphi_k(x)$ непрерывны при $x = a \in A$, то функция $f(x)$ непрерывна при $x = a$;

3. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ равномерно сходится на сегменте $[a, b]$ к некоторой функции $f(x)$, а функции $\varphi_k(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a, b]$, то функция $f(x)$ также интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \varphi_k(x)\,dx,$$

т.е.

$$\int_a^b \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \Big] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\int_a^b \varphi_k(x)\,dx \Big];$$

4. Если функции $\varphi_k(x)$ дифференцируемы на сегменте $[a, b]$, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi'_k(x)$ равномерно сходится на этом сегменте, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ в некоторой точке x_c вытекает его сходимость в произвольной точке сегмента $[a, b]$ к некоторой дифференцируемой на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$, причем

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'(x) ,$$

т.е.

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'(x).$$

Применим эти теоремы к степенному ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Этот ряд, как было показано при рассмотрении рядов Тейлора, сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, где $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$. Степенной ряд сходится равномерно при $|x| \leq x_0$, где x_0 - любое число, удовлетворяющее неравенству $|x_0| < R$. Действительно, в этом случае $|a_k x^k| \leq |a_k x_0^k|$, а ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x_0^k|$ сходится. Поэтому при $|x| < R$ степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ будет непрерывной функцией. Выясним вопрос об области значений x , в которой сходятся ряды, получающиеся в результате формального дифференцирования и интегрирования степенного ряда, т.е. ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^k}{k} .$$

Эти ряды также являются степенными рядами с радиусами сходимости

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|}} \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{|a_{k-1}|}{k}}} .$$

Так как по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)} = 1 ,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{|a_{k-1}|}{k}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} ,$$

поэтому $R_1 = R_2 = R$. Следовательно, степенной ряд и ряды, получающиеся в результате почленного дифференцирования и интегрирования этого ряда, сходятся равномерно при $|x| \le x_0 < R$. Поэтому степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать при $|x| < R$ (в силу произвольности числа x_0).

§ 4. Теорема Арцела

Рассмотрим для функциональных последовательностей непрерывных функций аналог теоремы Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей. Вопрос ставится следующим образом: при каких условиях из функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность. Одного требования ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ недостаточно. Оказывается, что достаточными являются следующие условия:

1) функции $f_n(x)$ должны быть равномерно ограничены, т.е. должно существовать такое число $c > 0$, что $|f_n(x)| < c$

при любых значениях n и $x \in [a, b]$,

2) функции $f_n(x)$ должны быть равностепенно непрерывны, т.е. при любом $\varepsilon > 0$ должно существовать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любых значениях x и x', удовлетворяющих неравенству $|x - x'| < \delta$, выполняются неравенства

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon.$$

<u>Теорема Арцела</u>. Из всякой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на сегменте $[a, b]$ последовательности функций $\{f_n(x)\}$ можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность.

<u>Доказательство</u>. Пусть последовательность $f_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Это означает, что $|f_n(x)| \leq C$ и при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$, если $|x - x'| < \delta$, $x \in [a, b]$, $x' \in [a, b]$. Графики функций $f_n(x)$ заключены в прямоугольнике $y = -C$, $y = +C$, $x = a$, $x = b$. Рассмотрим одно свойство этих графиков.

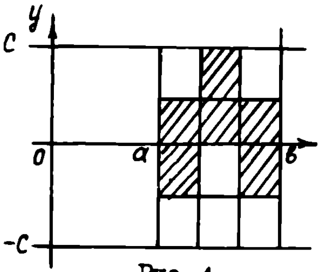


Рис.4

Зададимся произвольным числом $\varepsilon_0 > 0$, таким, чтобы $\frac{C}{\varepsilon_0}$ было целым числом.

По данному числу ε_0 из условия равностепенной непрерывности найдем соответствующее значение $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0)$. Разделим сегмент $[a, b]$ на равные части с длиной, меньшей δ_0.

Если мы разделим промежуток $[-C, +C]$ на части длиной ε_0, то в результате весь прямоугольник разделится на ряд прямоугольников высотой ε_0 и длиной, меньшей δ_0. График каждой функции в пределах полосы $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ может проходить не больше, чем по двум соседним прямоугольникам в силу неравенства $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon_0$, если

$|x-x'| < \delta_0$. Приступим теперь к выделению из последовательности $\{f_n(x)\}$ равномерно сходящейся подпоследовательности. Пусть

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon_0}{2^k} \qquad (k = 0, 1, 2 \dots).$$

Этим числам пусть соответствуют числа δ_k. Разделим исходный прямоугольник на ряд прямоугольников высотой ε_0 и длиной, меньшей δ_0. Тогда, в первой полосе $x_0 \le x \le x_1$ ($x_0 = a$, $x_1 - x_0 < \delta_0$), по крайней мере в одной паре соседних прямоугольников, проходит бесконечное число графиков функций (эту пару на рис. 4 заштриховали). В результате из последовательности $\{f_n(x)\}$ мы выделили подпоследовательность функций, графики которых в первой полосе проходят по двум соседним заштрихованным прямоугольникам. Во второй полосе будем рассматривать графики не всех функций, а тех функций, которые входят в выделенную подпоследовательность. Применяя для графиков этих функций во второй полосе $x_1 \le x \le x_2$ те же рассуждения, что и для функций $f_n(x)$ в первой полосе, мы сможем выделить еще более узкую подпоследовательность функций, графики которых проходят по двум соседним прямоугольникам в первой полосе и по двум соседним прямоугольникам во второй полосе. Продолжая процесс выделения подпоследовательностей при переходе от рассмотрения одной полосы к рассмотрению следующей мы в конце концов выделим из последовательности $\{f_n(x)\}$ подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}$ функций, графики которых в каждой полосе проходят по двум соседним прямоугольникам. Введем обозначение $f_{k_n}(x) = f_{n,0}(x)$. Таким образом, при любых значениях n, m, x имеем:

$$\left| f_{n,0}(x) - f_{m,0}(x) \right| < 2\varepsilon_0 .$$

Перейдем теперь от ε_0 к ε_1. Разделим каждый частичный сегмент на части с длиной, меньшей δ_1 и повторим все рассуждения, заменяя последовательность $\{f_n(x)\}$ на

последовательность $\{f_{n,0}(x)\}$, ε_0 на ε_1, δ_0 на δ_1. В результате из последовательности $\{f_{n,0}(x)\}$ мы выделим подпоследовательность $\{f_{\ell_n,0}(x)\} = \{f_{n,1}(x)\}$ функций, графики которых в пределах каждой полосы (шириной, меньшей δ_1) проходят по двум соседним прямоугольникам высотой $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$, т.е. при любых значениях n, m, x имеем:

$$\left| f_{n,1}(x) - f_{m,1}(x) \right| < 2\varepsilon_1 .$$

Точно таким же образом, переходя последовательно к ε_2, ε_3, ..., ε_k ... мы выделим подпоследовательности $\{f_{n,2}(x)\}$, $\{f_{n,3}(x)\}$, ..., $\{f_{n,k}(x)\}$.

При этом последовательность $\{f_{n,k}(x)\}$ является подпоследовательностью по отношению к $\{f_{n,k-1}(x)\}$ и графики функций $f_{n,k}(x)$ в пределах полосы, шириной меньшей δ_k, проходят по двум соседним прямоугольникам высотой ε_k, откуда $\left| f_{n,\ell}(x) - f_{m,p}(x) \right| \leq 2\varepsilon_k$ при $\ell \geq k$, $p \geq k$ и любых значениях n, m, x. Рассмотрим теперь последовательность $\{f_{n,n}(x)\}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\left| f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x) \right| < \varepsilon ,$$

если $n \geq N$, $m \geq N$, а номер N выбран из условия $2\varepsilon_N < \varepsilon$. Таким образом, для последовательности функций $\{f_{n,n}(x)\}$ выполнен критерий Коши равномерной сходимости. Теорема доказана.

§ 5. Равномерное приближение заданной функции полиномами

Во многих конкретных приложениях анализа очень важным является вопрос о возможности равномерного приближения заданной непрерывной функции с помощью функций из некоторого класса, например полиномов. Проще всего этот вопрос решается с помощью так называемых дельтаобразных последовательностей, построенных с помощью функций заданного класса.

Теорема. Пусть функции $D_n(x)$ интегрируемы на сегменте $[-\omega, \omega]$ и удовлетворяют условиям: 1) $D_n(-x) = D_n(x)$, $D_n(x) \geq 0$; 2) последовательность $\{D_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю при $|x| \geq \delta$ для любого $\delta < \omega$;
3) $\int\limits_{-\omega}^{\omega} D_n(t)\,dt = 1$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a-\omega, b+\omega]$, то последовательность функций

$$f_n(x) = \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t+x)\, D_n(t)\,dt$$

сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ $(a < b)$ к функции $f(x)$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a-\omega, b+\omega]$, то она ограничена и равномерно непрерывна на этом сегменте, т.е. $|f(x)| < C$ и при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $|t| \leq \delta < \omega$ имеет место неравенство $|f(t+x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $x \in [a, b]$. Поэтому

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int\limits_{-\omega}^{\omega} [f(t+x) - f(x)] D_n(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{|t|\le\delta} [f(t+x)-f(x)]\, D_n(t)dt + \int_{\delta\le|t|\le\omega} [f(t+x)-f(x)] D_n(t)dt \right| \le$$

$$\le \int_{|t|\le\delta} \left|f(t+x)-f(x)\right| D_n(t)dt + \int_{\delta\le|t|\le\omega} \left[\left|f(t+x)\right| + \left|f(x)\right|\right] D_n(t)dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|\le\delta} D_n(t)dt + 2C \int_{\delta\le|t|\le\omega} D_n(t)dt \le \frac{\varepsilon}{2} + 4C \sup_{\delta\le|t|\le\omega} D_n(t)(\omega-\delta).$$

Так как последовательность $\{D_n(t)\}$ сходится равномерно к нулю при $\delta \le t \le \omega$, то найдется такой номер N, что при $n \ge N$ имеет место неравенство

$$4C \sup_{\delta\le|t|\le\omega} D_n(t)(\omega-\delta) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Поэтому при $n \ge N$ имеем:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ,$$

т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ при $x \in [a, b]$. Теорема доказана.

__Примеры__: I. Покажем, что функции

$$D_n(x) = C_n \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2}\right)^n$$

при дополнительном условии нормировки

$$\int_{-\omega}^{\omega} D_n(x)dx = 1$$

удовлетворяют всем условиям теоремы. Предварительно оценим постоянную C_n. По формуле Тейлора имеем:

$(1-t)^n = 1 - nt + \frac{n(n-1)}{2}\xi^2$, где $\xi \in (0,t)$, Поэтому при $n \ge 1$ справедливо неравенство $(1-t)^n > 1 - nt$. Оценим ин-

теграл $\int\limits_{-\omega}^{\omega}(1-\frac{x^2}{\omega^2})\,dx$ при $n\geq 1$: $\int\limits_{-\omega}^{\omega}(1-\frac{x^2}{\omega^2})^n dx >$

$$\int\limits_{-\frac{\omega}{\sqrt{n}}}^{\frac{\omega}{\sqrt{n}}}(1-\frac{x^2}{\omega^2})^n dx \geq \int\limits_{-\frac{\omega}{\sqrt{n}}}^{\frac{\omega}{\sqrt{n}}}(1-n\frac{x^2}{\omega^2})\,dx = \frac{4\omega}{3\sqrt{n}} .$$

Отсюда

$$C_n = \frac{1}{\int\limits_{-\omega}^{\omega}(1-x^2)^n dx} \leq \frac{3\sqrt{n}}{4\omega} .$$

Проверим теперь выполнение условий теоремы. Имеем:

$$D_n(-x) = D_n(x), \quad D_n(x) \geq 0,$$

причем при $|x| \geq \delta$ $(\delta < \omega)$ имеем оценку:

$$D_n(x) = C_n\left(1-\frac{x^2}{\omega^2}\right)^n \leq \frac{3\sqrt{n}}{4\omega}\left(1-\frac{\delta^2}{\omega^2}\right)^n .$$

Так как предел правой части неравенства при $n\to\infty$ равен нулю, то последовательность $D_n(x)$ при $|x|\geq\delta$ равномерно сходится к нулю.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, a+\omega]$ и удовлетворяет условию $f(a)=f(a+\omega)=0$. Продолжим эту функцию на сегмент $[a-\omega, a+2\omega]$, положив $f(x)=0$ при $x\notin[a, a+\omega]$. Тогда

$$f_n(x) = \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t+x)\,D_n(t)\,dt = \int\limits_{-\omega+x}^{\omega+x} f(s)\,D_n(s-x)\,ds.$$

Так как $-\omega+x\leq a$, $\omega+x\geq a+\omega$ при $x\in[a, a+\omega]$, то для этих значений x имеем:

$$f_n(x) = \int\limits_{a}^{a+\omega} f(s)\,D_n(s-x)\,ds .$$

Функции $f_n(x)$ в данном случае будут полиномами степени $2n$

От условия $f(a)=f(a+\omega)=0$ можно избавиться, рассматривая вместо функции $f(x)$ функцию

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{(x-a)}{\omega}\Big[f(\omega+a)-f(a)\Big],$$

удовлетворяющую условию $g(a)=g(\omega+a)=0$ и отличающуюся от функции $f(x)$ полиномом первой степени. Таким образом, в данном случае, полагая $\omega=b-a$, мы приходим к следующей теореме.

<u>Теорема Вейерштрасса</u>. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то существует последовательность полиномов, равномерно сходящаяся на $[a,b]$ к функции $f(x)$.

2. Покажем, что функции $D_n(x)=C_n\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}$ при дополнительном условии нормировки $\int\limits_{-\omega}^{\omega}D_n(x)\,dx=1$ удовлетворяют условиям теоремы. Очевидно, что $D_n(-x)=D_n(x)$, $D_n(x)\geq 0$. Оценим постоянную C_n. Имеем:

$$\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}=\left(1-\sin^2\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{n}\geq 1-n\sin^2\frac{\pi x}{2\omega}\geq 1-n\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)^2.$$

Мы воспользовались неравенством:

$$|\sin x|\leq|x| \quad \text{при} \quad |x|\leq\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\omega}^{\omega}\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}dx>\int\limits_{-\frac{2\omega}{\pi\sqrt{n}}}^{\frac{2\omega}{\pi\sqrt{n}}}\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}dx\geq\int\limits_{-\frac{2\omega}{\pi\sqrt{n}}}^{\frac{2\omega}{\pi\sqrt{n}}}\left[1-n\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{8}{3}\,\frac{\omega}{\pi\sqrt{n}}, \quad \text{т.е.} \quad C_n=\frac{1}{\int\limits_{-\omega}^{\omega}\left(\cos\frac{\pi x}{2\omega}\right)^{2n}dx}<\frac{3\pi\sqrt{n}}{8\omega}.$$

Отсюда при $|x| \geq \delta$

$$D_n(x) < \frac{3\pi\sqrt{n}}{8\omega}\left(1 - \sin^2\frac{\pi\delta}{2\omega}\right)^n .$$

Так как правая часть неравенства сходится при $n \to \infty$ к нулю, то последовательность $\{D_n(x)\}$ при $|x| \geq \delta$ равномерно сходится к нулю. Пусть $f(x)$ – непрерывная периодическая с периодом 2ω функция. Тогда при $x \in [-\omega, \omega]$ имеем:

$$f_n(x) = \int_{-\omega}^{\omega} f(t+x) D_n(t)\,dt = \int_{-\omega+x}^{\omega+x} f(s) D_n(s-x)\,ds =$$

$$= \int_{-\omega}^{\omega} f(s) D_n(s-x)\,ds + \int_{-\omega+x}^{-\omega} f(s) D_n(s-x)\,ds - \int_{\omega+x}^{\omega} f(s) D_n(s-x)\,ds .$$

Так как

$$f(x-2\omega) = f(x), \qquad D_n(x-2\omega) = D_n(x),$$

то

$$\int_{-\omega+x}^{-\omega} f(s) D_n(s-x)\,ds = \int_{\omega+x}^{\omega} f(s-2\omega) D_n(s-x-2\omega)\,ds = \int_{\omega+x}^{\omega} f(s) D_n(s-x)\,ds ,$$

откуда

$$f_n(x) = \int_{-\omega}^{\omega} f(s) D_n(s-x)\,ds .$$

Если воспользоваться явным видом для функции $D_n(x)$, то мы увидим, что функции $f_n(x)$ представляются в виде

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos\frac{\pi k x}{\omega} + b_k \sin\frac{\pi k x}{\omega}\right),$$

так как

$$D_n(x) = \frac{C_n}{2^n}\left(1+\cos\frac{\pi x}{\omega}\right)^n = C_n\left(1-\frac{e^{i\frac{\pi x}{\omega}}+e^{-i\frac{\pi x}{\omega}}}{2}\right)^n$$

и

$$e^{\pm i\frac{\pi k x}{\omega}} = \cos\frac{\pi k x}{\omega} \pm i\sin\frac{\pi k x}{\omega}.$$

Выражение вида

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\cos\frac{\pi k x}{\omega} + b_k\sin\frac{\pi k x}{\omega}\right)$$

называется тригонометрическим полиномом степени n с периодом 2ω. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна и периодична, то существует последовательность тригонометрических полиномов с тем же периодом, равномерно сходящаяся к функции $f(x)$.

§ 6. Сходимость в среднем. Ряды Фурье

Для функций, интегрируемых на сегменте $[a, b]$, существует обобщение теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении функции последовательностью тригонометрических полиномов. Для рассмотрения такого обобщения предварительно рассмотрим обобщение понятия равномерной сходимости последовательности.

Определение. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0 .$$

Легко показать, что из равномерной сходимости вытекает сходимость в среднем. Действительно, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a, b]$ равномерно к функции $f(x)$, то при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon_1)$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1$, если $n \geq N$, $x \in [a, b]$. Но в таком случае при $n \geq N$

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon_1^2 (b - a) .$$

Полагая при произвольном $\varepsilon > 0$ $\varepsilon_1^2 (b-a) = \varepsilon$, получим, что при $n \geq N$

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon ,$$

что и требовалось доказать.

Понятие сходимости в среднем удобно при изучении поведения

при $n \to \infty$ интегралов вида $\int_a^b f_n(x) g(x)\, dx$

с заданной функцией $g(x)$.

Теорема. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ интегрируемых на сегменте $[a, b]$ функций сходится на этом сегменте в среднем к интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) g(x)\, dx = \int_a^b f(x) g(x)\, dx .$$

Доказательство. Используя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$\left| \int_a^b f_n(x) g(x)\, dx - \int_a^b f(x) g(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] g(x)\, dx \right| \le$$

$$\le \sqrt{\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b g^2(x)\, dx} .$$

Правая часть неравенства сходится к нулю при $n \to \infty$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

У понятия сходимости в среднем существует очень полезное для приложений свойство.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\bar{f}(x)$, принимающая заданные значения при $x = a$ и $x = b$, что

$$\int_a^b [f(x) - \bar{f}(x)]^2 dx < \varepsilon .$$

Доказательство. Пусть R — любое разбиение сегмента

$[a, b]$ на частичные сегменты $[a_i\ ,\ a_{i+1}]$, $\Delta x_i = a_{i+1} - a_i$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$, а Δ – наибольшая из длин частичных сегментов. Так как функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то $|f(x)| \le M$,

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0 ,$$

где M – некоторая постоянная, а ω_i – колебание функции $f(x)$ на сегменте $[a_i\ ,\ a_{i+1}]$. Определим функцию $\bar{f}(x)$ следующим образом: $\bar{f}(x)$ на каждом из сегментов $[a_i\ ,\ a_{i+1}]$ – линейная функция, принимающая заданные значения при $x = a$ и $x = b$, причем $\bar{f}(a_i) = f(a_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$. Очевидно, что функция $\bar{f}(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, а на каждом сегменте $[a_i\ ,\ a_{i+1}]$, лежащем внутри сегмента $[a, b]$,

$$\min[f(a_i), f(a_{i+1})] \le \bar{f}(x) \le \max[f(a_i), f(a_{i+1})],$$

$$f(x) - \bar{f}(x) \le f(x) - \min[f(a_i), f(a_{i+1})] \le \omega_i ,$$

$$\bar{f}(x) - f(x) \le \max[f(a_i), f(a_{i+1})] - f(x) \le \omega_i ,$$

т.е. $|f(x) - \bar{f}(x)| \le \omega_i$ и

$$[f(x) - \bar{f}(x)]^2 \le [|f(x)| + |\bar{f}(x)|]\ |f(x) - \bar{f}(x)| \le$$

$$\le 2M\omega_i .$$

На сегментах $[a_0, a_1]$, $[a_{n-1}, a_n]$ имеем:

$$[f(x)-\bar{f}(x)]^2 \le [|f(x)|+|\bar{f}(x)|]^2 \le (M+M_1)^2 ,$$

где

$$M_1 = max[M, |\bar{f}(a)|, |\bar{f}(b)|] .$$

Поэтому

$$\int_a^b [f(x)-\bar{f}(x)]^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} [f(x)-\bar{f}(x)]^2 dx \le$$

$$\le 2M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i + 2(M+M_1)^2 \Delta .$$

Правая часть неравенства сходится к нулю при $\Delta \to 0$. Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение R сегмента $[a, b]$, что

$$\int_a^b [f(x)-\bar{f}(x)]^2 dx < \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь важный для приложений вопрос об отыскании для функции $f(x)$ наилучшего приближения в среднем на сегменте $[a, b]$ с помощью линейной комбинации первых n функций последовательности функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots ,$ т.е.

вопрос об определении таких постоянных $a_1, a_2, \dots, a_n$, при которых величина

$$J = J(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_a^b \Big[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\Big]^2 dx$$

будет минимальной. Этот вопрос легко решается, когда функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ будут взаимно ортогональны на отрезке $[a, b]$, т.е. $\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_\ell(x)dx = 0$ при $k \neq \ell$.

В этом случае

$$J = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 d_k^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^2 d_k^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 d_k^2 ,$$

где

$$d_k^2 = \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx$$

$$c_k = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx .$$

Отсюда

$$\delta_n = \min J(a_1, a_2, \dots, a_n) = J(c_1, c_2, \dots, c_n) = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 d_k^2 .$$

Заметим, что постоянные c_k не зависят от n, т.е. величина δ_n является монотонно не возрастающей и ограни-

ченной снизу $(\delta_n \geq 0)$. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta_0$$

и, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 d_k^2$ сходится, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 d_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx - \delta_0 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя. При $\delta_n = 0$ функцию $f(x)$ можно приблизить в среднем на $[a,b]$ с любой степенью точности функциями вида $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$.

Если $\delta_0 = 0$ для произвольной функции $f(x)$ из какого-то класса функций, то система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ называется полной на сегменте $[a, b]$ для рассматриваемого класса функций. В этом случае мы имеем равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 d_k^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx ,$$

которое называется равенством Парсеваля.

Применим полученные результаты к вопросу об отыскании для функции $f(x)$ наилучшего приближения в среднем на $[a, b]$ с помощью тригонометрических полиномов заданной степени n с периодом $(b-a)$. Так как при линейной замене переменной x тригонометрический полином остается тригонометрическим полиномом той же степени, то с помощью линейной замены переменной рассматриваемый вопрос можно свести к аналогичному вопросу для случая $a = -\pi$, $b = \pi$. В этом случае тригонометрический полином степени n имеет вид:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] .$$

Легко проверить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l \\ \pi & \text{при } k = l \neq 0 \\ 2\pi & \text{при } k = l = 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l \\ \pi & \text{при } k = l \neq 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx\, dx = 0 .$$

Мы видим, что функции последовательности $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x$ взаимно ортогональны на сегменте $[-\pi, \pi]$. Поэтому наилучшее приближение в среднем на $[-\pi, \pi]$ для функции $f(x)$ дают тригонометрические полиномы вида

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

(первый коэффициент мы обозначили через $\frac{a_0}{2}$ вместо a_0 для симметрии формул, дающих выражения для a_k, b_k). Функции $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx+b_k\sin kx],$$

который носит название ряда Фурье для функции $f(x)$. В данном случае неравенство Бесселя имеет вид:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Покажем, что для интегрируемых на $[-\pi,\pi]$ функций имеем равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Теорема. Частичные суммы ряда Фурье для интегрируемой на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ сходятся в среднем на сегменте $[-\pi,\pi]$ к этой функции.

Доказательство. При произвольном $\varepsilon>0$ можно найти такую непрерывную функцию $g(x)$, удовлетворяющую условию $g(-\pi)=g(\pi)$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Кроме того, по теореме Вейерштрасса существует равномерно сходящаяся к $g(x)$ последовательность тригонометрических полиномов $\{g_n(x)\}$ периода 2π. Эта последовательность сходится к $g(x)$ и в среднем на $[a, b]$, т.е. при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n \geq N$ имеет место неравенство:

$$\int_a^b [g(x) - g_n(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Так как частичная сумма ряда Фурье $f_n(x)$ дает для функции $f(x)$ наилучшее приближение в среднем на сегменте $[-\pi, \pi]$ среди всех тригонометрических полиномов степени n, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g_n(x)]^2 dx .$$

Поэтому при $n \geq N$ имеем:

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f(x) - g_n(x)]^2 dx =$$

$$= \int_a^b \{[f(x) - g(x)] + [g(x) - g_n(x)]\}^2 dx \leq$$

$$\leq 2\left\{ \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx + \int_a^b [g(x) - g_n(x)]^2 dx \right\} < \varepsilon ,$$

что и требовалось доказать. (Мы воспользовались очевидным неравенством $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.)

Таким образом, система функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ полна на сегменте $[-\pi, \pi]$ в классе интегрируемых на этом сегменте функций. Так как частичная сумма ряда Фурье $f_n(x)$ функции $f(x)$ имеет на сегменте $[-\pi, \pi]$ непрерывные производные любого порядка, то мы приходим к следующему обобщению ранее доказанной теоремы.

<u>Теорема.</u> Интегрируемую на сегменте $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x)$ можно приблизить в среднем на этом сегменте со сколь угодно большой точностью с помощью функции, имеющей непрерывные производные любого порядка, т.е. при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такую функцию $\bar{f}(x)$, имеющую непрерывные производные любого порядка, что

$$\int_a^b \left[f(x) - \bar{f}(x)\right]^2 dx < \varepsilon .$$

Теорема остается в силе для функции $f(x)$, интегрируемой на произвольном сегменте $[a, b]$, так как с помощью линейной замены переменных этот сегмент можно привести к сегменту $[-\pi, \pi]$.

§ 7. Сходимость ряда Фурье в точке. Интеграл Фурье

Рассмотрим вопрос о сходимости ряда Фурье в точке. Для этого предварительно преобразуем выражение для частичных сумм ряда Фурье. Так как члены ряда Фурье являются периодическими функциями, то в дальнейшем будем считать функцию $f(x)$ периодической с периодом 2π (этого можно добиться, не меняя коэффициентов ряда Фурье, если функцию $f(x)$ периодически продолжить вне отрезка $[-\pi, \pi)$, опираясь на значения $f(x)$ на самом отрезке). Имеем:

$$f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\cos kx\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\cos ks\,ds+\sin kx\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\sin ks\,ds\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos ks+\sin kx\sin ks)\right]ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(s-x)\right]ds\ .$$

Вычислим сумму в подинтегральном выражении:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2}+Re\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+Re\frac{e^{i(n+1)x}-e^{ix}}{e^{ix}-1}=\frac{1}{2}+Re\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x}-e^{\frac{ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}}=\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})x\right]}{2\sin\frac{x}{2}}\ .$$

Мы воспользовались формулой для суммы геометрической прогрессии. Таким образом,

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(s)D_n(s-x)ds\ ,$$

где

$$D_n(x) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\pi \sin\frac{x}{2}} .$$

Положим $s = t + x$:

$$f_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x) D_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t)\,dt +$$

$$+ \int_{-\pi-x}^{-\pi} f(t+x) D_n(t)\,dt - \int_{\pi-x}^{\pi} f(t+x) D_n(t)\,dt .$$

Второй и третий интегралы равны друг другу, в чем легко убедиться, заменяя во втором интеграле t на $t-2\pi$ и используя равенства $f(x-2\pi) = f(x)$, $D_n(x-2\pi) = D_n(x)$. Следовательно,

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t)\,dt .$$

Рассмотрим некоторые свойства функций $D_n(x)$. Пусть $f(x) \equiv 1$. Тогда все коэффициенты Фурье равны нулю, кроме a_0 и $f_n(x) \equiv 1$. Поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$.

Кроме того, очевидно, что $D_n(-x) = D_n(x)$. При изучении характера сходимости рядов Фурье нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом конечном отрезке, причем функция $g(x)$ ограничена, а интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\,ds$ сходится. Тогда интегралы

$$J(x,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t+x)g(t)\cos\lambda t\,dt, \quad \bar{J}(x,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t+x)g(t)\sin\lambda t\,dt$$

сходятся к нулю при $\lambda \to +\infty$ равномерно на любом сегменте $|x| \leq a$, т.е. при любом $\varepsilon > 0$ и $|x|\leq a$ найдется такое число $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}(\varepsilon)$, что при $\lambda > \bar{\lambda}$ выполняются неравенства $|J(x,\lambda)| < \varepsilon$, $|\bar{J}(x,\lambda)| < \varepsilon$.

Доказательство. Проведем доказательство для интеграла $J(x,\lambda)$, так как для интеграла $\bar{J}(x,\lambda)$ доказательство проводится аналогично. Заменим t на $t+\frac{\pi}{\lambda}$:

$$J(x,\lambda)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t+x+\frac{\pi}{\lambda}\right) g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos\lambda t\,dt.$$

Если возьмем полусумму двух выражений для $J(x,\lambda)$, то придем к следующей оценке:

$$|J(x,\lambda)|=\frac{1}{2}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(s)g(t)\right]\cos\lambda t\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(s)g(t)\right|dt \qquad (s=t+x).$$

Отсюда $|J(x,\lambda)| \leq J_N^{(1)} + J_N^{(2)}$, где

$$J_N^{(1)}=\frac{1}{2}\int\limits_{|t|\geq N}\left|f\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(s)g(t)\right|dt,$$

$$J_N^{(2)}=\frac{1}{2}\int\limits_{|t|\le N}\left|f\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(s)g(t)\right|dt\ .$$

Оценим интегралы $J_N^{(1)}$ и $J_N^{(2)}$ при $|x|\le a$, $\lambda\ge\pi$. Так как при $|t|\ge N$ имеем $|s|\ge N-a$, $\left|s+\frac{\pi}{\lambda}\right|\ge N-a-1$, то

$$J_N^{(1)}\le\frac{1}{2}\cdot 2M\int\limits_{|s|\ge N-a-1}|f(s)|\,ds\ ,$$

где $M=\sup\limits_t|g(t)|$.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(s)|\,ds$ сходится, поэтому при любом $\varepsilon_1>0$ можно найти такое значение $N=N(\varepsilon_1)$, чтобы $M\int\limits_{|s|\ge N-a-1}|f(s)|\,ds<\varepsilon_1$. В таком случае $J_N^{(1)}<\varepsilon_1$.

При выбранном значении N оценим интеграл $J_N^{(2)}$, учитывая, что при $|t|\le N$ имеем $|s|\le N+a$, $\left|s+\frac{\pi}{\lambda}\right|\le N+a+1$. Полагая $M_1=\sup\limits_{|s|\le N+a+1}|f(s)|$, получим:

$$J_N^{(2)}=\int\limits_{|t|\le N}\left|\left[f\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(s)\right]g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)+\left[g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-g(t)\right]f(s)\right|dt\le$$

$$\le M\int\limits_{|s|\le N+a}\left|f\left(s+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(s)\right|ds+M_1\int\limits_{|t|\le N}\left|g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-g(t)\right|dt\ .$$

Оценим интеграл $\int\limits_{|t|\le N}\left|g\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-g(t)\right|dt$. Разобьем сегмент $|t|\le N$ на частичные сегменты длиной $\frac{\pi}{\lambda}$ с помощью точек вида $t_k=-N+k\frac{\pi}{\lambda}$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

Если ω_k – колебание функции $g(t)$ на сегменте $[t_k, t_{k+1}]$, то при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем:

$$|g(t+\frac{\pi}{\lambda})-g(t)| = |[g(t+\frac{\pi}{\lambda})-g(t_{k+1})]+[g(t_{k+1})-g(t)]| \le$$

$$\le |g(t+\frac{\pi}{\lambda})-g(t_{k+1})| + |g(t_{k+1})-g(t)| \le \omega_{k+1} + \omega_k .$$

Поэтому

$$\int\limits_{|t|\le N} |g(t+\frac{\pi}{\lambda})-g(t)|dt \le \sum_{|t_k|\le N} \omega_{k+1}\cdot\frac{\pi}{\lambda} + \sum_{|t_k|\le N} \omega_k\cdot\frac{\pi}{\lambda} \le 2 \sum_{|t_k|\le N+1} \omega_k\cdot\frac{\pi}{\lambda} .$$

Так как длина частичного сегмента сходится к нулю при $\lambda \to +\infty$, то, в силу необходимого и достаточного признака интегрируемости функции $g(t)$ на любом конечном сегменте, правая часть неравенства сходится к нулю при $\lambda \to +\infty$, т.е. найдется такое число $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon_1)$, что $\int\limits_{|t|\le N} |g(t+\frac{\pi}{\lambda})-g(t)|dt < \varepsilon_1$ при $\lambda \ge \lambda_1$.

Аналогично можно доказать существование такого числа $\lambda_2 = \lambda_2(\varepsilon_1)$, что $\int\limits_{|s|\le N+a} |f(s+\frac{\pi}{\lambda})-f(s)|ds < \varepsilon_1$ при $\lambda > \lambda_2$. Таким образом, при $\lambda \ge \bar{\lambda} = max(\lambda_1, \lambda_2)$ имеем:

$$|J(x,\lambda)| < \varepsilon_1 + M\varepsilon_1 + M_1\varepsilon_1 = \varepsilon_1(1+M+M_1) .$$

Выберем при любом $\varepsilon > 0$ величину ε_1 из условия $\varepsilon_1(1+M+M_1) = \varepsilon$. Тогда при $\lambda \ge \bar{\lambda}(\varepsilon)$ имеем $|J(x,\lambda)| < \varepsilon$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте

$[-\pi, \pi]$ и периодична с периодом 2π. Если в рассматриваемой точке x существуют пределы $f(x-0)$, $f(x+0)$ и функция имеет ограниченную производную на отрезках $(x-\delta_0, x)$, $(x, x+\delta_0)$ $(\delta_0 > 0)$, то ряд Фурье в данной точке сходится к $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Если же функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на некотором сегменте $[a, b]$, то ряд Фурье сходится равномерно к функции $f(x)$ на любом сегменте $[a_1, b_1]$ при $a < a_1 < b_1 < b$.

Доказательство. Для частичной суммы $f_n(x)$ ряда Фурье справедливо представление:

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t)\,dt, \quad \text{где } D_n(x) = \frac{\sin \lambda_n x}{2\pi \sin \frac{x}{2}}, \quad \lambda_n = n + \frac{1}{2}.$$

Функция $D_n(x)$ обладает следующими свойствами: $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$, $D_n(-x) = D_n(x)$. Отсюда, в частности, вытекают равенства:

$$\int_{-\delta}^{0} D_n(t)\,dt = \int_{0}^{\delta} D_n(t)\,dt \quad \text{при любом } \delta > 0, \ \delta \le \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)\,dt = \int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Преобразуем выражение для $f_n(x)$ следующим образом:

$$f_n(x) = \int_{\delta \le |t| \le \pi} f(t+x) D_n(t)\,dt + \int_{-\delta}^{0} [f(t+x) - f(x-0)] D_n(t)\,dt +$$

$$+ \int_{0}^{\delta} [f(t+x) - f(x+0)] D_n(t)\,dt + [f(x-0) + f(x+0)] \int_{0}^{\delta} D_n(t)\,dt.$$

Так как $\int\limits_0^{\delta} D_n(t)dt = \int\limits_0^{\pi} D_n(t)dt - \int\limits_{\delta}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2} - \int\limits_{\delta}^{\pi} D_n(t)\,dt$,

то $$f_n(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} + J_n(\delta,x) + \bar{J}_n(\delta,x),$$

где

$$J_n(\delta,x) = \int\limits_{-\delta}^{0} [f(t+x)-f(x-0)]D_n(t)dt + \int\limits_{0}^{\delta} [f(t+x)-f(x+0)]D_n(t)\,dt,$$

$$\bar{J}_n(\delta,x) = \int\limits_{\delta \le |t| \le \pi} f(t+x)D_n(t)dt - [f(x-0)+f(x+0)]\int\limits_{\delta}^{\pi} D_n(t)\,dt.$$

Оценим $J_n(\delta,x)$. Если $|f'(s)| \le M$ при $s \in (x-\delta_0, x)$ или $s \in (x, x+\delta_0)$, то при $\delta < \delta_0 < \pi$ по формуле Лагранжа конечных приращений получим:

$$|f(t+x)-f(x-0)| = |f'(\xi)t| \le M|t|$$

при $-\delta \le t \le 0$ ($\xi \in (x-\delta, x)$). Из аналогичных соображений получим:

$$|f(t+x)-f(x+0)| \le Mt \qquad \text{при } 0 \le t \le \delta.$$

Поэтому при $\delta < \delta_0$ имеем:

$$|J_n(\delta,x)| \le M\int\limits_{-\delta}^{\delta} |tD_n(t)|dt \le M\delta,$$

так как

$$|tD_n(t)| \le \left|\frac{t}{2\pi \sin\frac{t}{2}}\right| \le \frac{1}{2} \qquad \text{при } |t| \le \pi.$$

Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ можно выбрать столь малое значение δ, что $|J_n(\delta, x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Оценим величину $\bar{J}_n(\delta, x)$.

Имеем:

$$\int\limits_{\delta \le |t| \le \pi} f(t+x) D_n(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t+x) g(t) \sin \lambda_n t \, dt ,$$

$$\int\limits_{\delta}^{\pi} D_n(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+x) \bar{g}(t) \sin \lambda_n t \, dt ,$$

где
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |x| \le 2\pi \\ 0 & \text{при } |x| > 2\pi \end{cases} ,$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \le 2\pi \\ 0 & \text{при } |x| > 2\pi \end{cases} ,$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi \sin \frac{x}{2}} & \text{при } \delta \le |x| \le \pi \\ 0 & \text{при } |x| < \delta \end{cases}$$

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi \sin \frac{x}{2}} & \text{при } \delta \le x \le \pi \\ 0 & \text{при } x > \pi \text{ и } x < \delta . \end{cases}$$

Согласно лемме, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t+x) g(t) \sin \lambda_n t \, dt$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+x) \bar{g}(t) \sin \lambda_n t \, dt$ при $n \to \infty$ равномерно сходятся к нулю на любом сегменте $|x| \le a$. Поэтому существует такое N, что при $n \ge N$ выполняется неравенство

$$|\bar{J}_n(\delta, x)| \le \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t+x) g(t) \sin \lambda_n t \, dt \right| +$$

$$+|f(x-0)+f(x+0)|\cdot\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t+x)\bar{g}(t)\sin\lambda_n t\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Таким образом, при $n \geq N$

$$\left|f_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| \leq |J_n(\delta,x)|+|\bar{J}_n(\delta,x)| < \varepsilon\ .$$

Первая часть теоремы доказана. Пусть теперь функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на сегменте $[a, b]$ и $[a_1, b_1] \subset [a, b]$. Тогда на сегменте $[a_1, b_1]$ функция $f(x)$ будет непрерывной (т.е. $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = f(x)$) и $|f'(t+x)| \leq M$ (M - некоторая постоянная) при $|t| \leq \delta \leq \delta_0$, где δ_0 - минимальное расстояние от концов сегмента $[a_1, b_1]$ до концов сегмента $[a, b]$ ($\delta_0 = min(b-b_1, a_1-a)$, если $a < a_1 < b_1 < b$). Поэтому величину δ можно выбрать не зависящей от x. Кроме того, $|f(x-0)+f(x+0)| = 2|f(x)| \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$

и, как вытекает из оценки $\bar{J}_n(\delta, x)$; номер N можно выбрать единым для всех $x \in [a_1, b_1]$. Эти рассуждения и показывают, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при $n \geq N$, т.е. частичные суммы $f_n(x)$ ряда Фурье сходятся к функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a_1, b_1]$. Теорема доказана.

В доказанном нами предельном соотношении

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin\lambda_n t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad \left(\lambda_n = n+\frac{1}{2}\right)$$

вклад в интеграл при достаточно больших значениях λ_n дает лишь область малых значений t, в которой $\sin\frac{t}{2}$ мало отличается от $\frac{t}{2}$. Поэтому естественно ожидать, что это соотношение можно заменить более общим

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

при определенных требованиях, наложенных на функцию $f(x)$. Левая часть этого соотношения называется интегралом Фурье для функции $f(x)$.

<u>Теорема.</u> Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(-\infty,+\infty)$ и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ сходится. Если в рассматриваемой точке x существуют пределы $f(x-0)$, $f(x+0)$ и функция имеет ограниченную производную на отрезках $(x-\delta_0, x),(x,x+\delta_0)$ $(\delta_0>0)$, то интеграл Фурье в данной точке сходится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Если же функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на некотором сегменте $[a, b]$ при $b-a<2\pi$, то интеграл Фурье сходится к функции $f(x)$ равномерно на любом сегменте $[a_1, b_1]$ при $a<a_1<b_1<b$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $x\in(c, c+2\pi)$ и $\varphi(x)=f(x)$ при $x\in[c, c+2\pi)$. Продолжим функцию $\varphi(x)$ вне отрезка $[c, c+2\pi)$ периодически с периодом 2π. Пусть $\lambda=\lambda_n+\alpha$.

где $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$, n – целое положительное число, $0 \le \alpha < 1$ а $\varphi_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье для функции $\varphi(x)$. Утверждения теоремы будут вытекать из предыдущей теоремы, если мы покажем, что при $\lambda \to +\infty$ разность

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \varphi_n(x)$$

сходится к нулю равномерно на любом сегменте $[a, b]$ при $c < a < b < c+2\pi$.

Так как $\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t+x)\,\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$, то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \varphi_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|t|\le\delta}\left[f(t+x)\,\frac{\sin\lambda t}{t} - \varphi(t+x)\,\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|t|\ge\delta} f(t+x)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi}\varphi(t+x)\,\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= J_1(x,\lambda) + J_2(x,\lambda) + J_3(x,\lambda).$$

Если выберем δ из условия, чтобы $[x-\delta, x+\delta] \subset [c, c+2\pi]$ при $x \in [a, b]$, то при $|t| \le \delta$ имеем $\varphi(t+x) = f(t+x)$. Поэтому

$$J_1(x,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\le\delta} f(t+x)\,\varphi(t,\lambda)\,dt,$$

где

$$\varphi(t,\lambda)=\frac{\sin\lambda t}{t}-\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sin\lambda t-\sin\lambda_n t}{t}+\sin\lambda_n t\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right)=$$

$$=\alpha\sin\lambda_n t\,\frac{\cos\alpha t-1}{\alpha t}+\alpha\cos\lambda_n t\,\frac{\sin\alpha t}{\alpha t}+\sin\lambda_n t\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right).$$

Отсюда

$$\left|\varphi(t,\lambda)\right|\le\left|\frac{\cos\alpha t-1}{\alpha t}\right|+\left|\frac{\sin\alpha t}{\alpha t}\right|+\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right| .$$

Так как функции $\frac{\cos t-1}{t}$, $\frac{\sin t}{t}$, $\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ имеют конечный предел при $t\to 0$ и непрерывны при $0<|t|\le\pi$, то функция $\varphi(t,\lambda)$ удовлетворяет неравенству $|\varphi(t,\lambda)|\le A$ при $|t|\le\pi$ (A - постоянная). Поэтому

$$\left|J_1(x,\lambda)\right|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\le\delta}\left|f(t+x)\right|\left|\varphi(t,\lambda)\right|dt\le$$

$$\le A\sup_{x\in[c,c+2\pi]}\left|f(x)\right|\frac{2\delta}{\pi} .$$

Следовательно, при любом $\varepsilon>0$ можно выбрать δ настолько малым, чтобы имело место неравенство $|J_1(x,\lambda)|<\frac{\varepsilon}{3}$ при $x\in[a,b]$. При выбранном значении δ, согласно лемме, интегралы

$$J_2(x,\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{|t|\ge\delta}f(t+x)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt ,$$

$$J_3(x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\varphi(t+x)\frac{\sin\lambda_n t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$ равномерно

сходятся к нулю при $\lambda\to+\infty$, $x\in[a,b]$. Поэтому найдется такое число $\bar\lambda=\bar\lambda(\varepsilon)$, что

$$|J_2(x,\lambda)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |J_3(x,\lambda)|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad \text{при } \lambda\ge\bar\lambda\quad x\in[a,b].$$

Следовательно, при $\lambda\ge\bar\lambda(\varepsilon)$, $x\in[a,b]$ имеем:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t+x)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt-\varphi_n(x)\right|\le|J_1(x,\lambda)|+|J_2(x,\lambda)|+|J_3(x,\lambda)|<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t+x)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(s)\,\frac{\sin\lambda(s-x)}{s-x}\,ds$$

и $\dfrac{\sin\lambda(s-x)}{s-x}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\cos\mu(s-x)\,d\mu$, то интеграл Фурье можно переписать в виде:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(s)\,ds\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\cos\mu(s-x)\,d\mu=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Так как $|f(s)\cos\mu(s-x)|\le|f(s)|$, то по теореме об интегрировании по параметру несобственных интегралов, зависящих от параметров, интегрирование по переменным s и μ для функций,

удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|\,ds < \infty ,$$

можно поменять местами, откуда $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} =$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} d\mu \left[\cos\mu x\, F_1(\mu) + \sin\mu x\, F_2(\mu)\right] ,$$ где

$$F_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos\mu s\, ds ,$$

$$F_2(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sin\mu s\, ds .$$

В заключение отметим, что с помощью формул

$\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ ряд Фурье и интеграл Фурье можно представить в симметричной форме:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} ,$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx ;$$

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(\mu) e^{-i\mu x} d\mu ,$$

где

$$F(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\mu x}\, dx \quad .$$

Предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} F(\mu)\, e^{-i\mu x}\, d\mu$$

часто кратко обозначают через

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\, e^{i\mu x}\, d\mu \quad .$$

Заметим, что ряд Фурье можно построить и для функции, заданной лишь на сегменте $[-\pi, \pi]$, так как при вычислении коэффициентов Фурье требуется знать значения функции лишь на этом сегменте. Для того, чтобы выяснить вопрос о сходимости ряда Фурье в этом случае, положим

$$\varphi(x) = f(x) \qquad \text{при } -\pi \leq x < \pi \,,$$

$$\varphi(x+2\pi k) = \varphi(x) \qquad \text{при } k=\pm 1, \pm 2, \ldots \,.$$

Функция $\varphi(x)$ будет периодической, причем коэффициенты Фурье, а следовательно и ряд Фурье, для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают. Поэтому, при рассмотренных ранее условиях ряд Фурье при $x \in (-\pi, \pi)$ сходится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, если же $x = \pm\pi$, то ряд Фурье сходится к

$$\frac{\varphi(\pi-0)+\varphi(\pi+0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} \quad .$$

Так же легко выясняется вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье на некотором отрезке.

Пример. Построим ряд Фурье для функции $f(x)=x$ при $x\in[-\pi,\pi]$. Тогда

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx.$$

В этом случае $a_k=0$, так как $x\cos kx$ – функция нечетная, а интеграл берется в симметричных пределах. Для вычисления b_k воспользуемся интегрированием по частям:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=(-1)^{k-1}\frac{2}{k}.$$

Поэтому при $|x|<\pi$

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2}{k}\sin kx.$$

§ 8. Функциональные последовательности комплекснозначных и вектор-функций

Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$ комплекснозначных функций $f_n(x)=u_n(x)+iv_n(x)$. С помощью понятия модуля комплексного числа на такие последовательности без изменения переносится определение равномерной сходимости. Для того, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на множестве A к комплекснозначной функции $f(x)=u(x)+iv(x)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ равномерно сходились на множестве A к функциям $u(x)$ и $v(x)$, соответственно. Это утверждение вытекает из соотношений:

$$|f_n(x)-f(x)|=\sqrt{[u_n(x)-u(x)]^2+[v_n(x)-v(x)]^2},$$

$$|u_n(x)-u(x)|\le|f_n(x)-f(x)|,$$

$$|v_n(x)-v(x)|\le|f_n(x)-f(x)|.$$

Аналогичные замечания справедливы и для последовательностей вектор-функций $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = (f_{n,1}(x), f_{n,2}(x), \ldots, f_{n,m}(x))$.

Вопрос о равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ из комплекснозначных или вектор-функций сводится, как и для обычного функционального ряда, к равномерной сходимости последовательности частичных сумм. При этом остается справедливым критерий Коши и вытекающий из него признак сравнения для сходимости функционального ряда: если $|\varphi_k(x)| \le \bar{\varphi}_k(x)$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{\varphi}_k(x)$ сходится, то и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ сходится; если при этом $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{\varphi}_k(x)$ сходится равномерно, то и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ сходится равномерно. Так же, как и для последовательностей обычных функций, функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ из комплекснозначных или вектор-функций равномерно сходится, если равномерно сходится функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} [f_{k+1}(x) - f_k(x)] .$$

Таким образом, на функциональные ряды и функциональные последовательности из комплекснозначных и вектор-функций переносятся все результаты, полученные ранее для рядов и последовательностей из обычных функций. Некоторые трудности может вызвать лишь доказательство теоремы Арцела для комплекснозначных и вектор-функций. Проведем доказательство теоремы Арцела для комплекснозначных функций.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ комплекснозначных функций удовлетворяет условиям: $|f_n(x)| \le C$ и при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon, \qquad \text{если } |x - x'| < \delta \ (x, x' \in A).$$

Покажем, что из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность. Пусть

$$f_n(x) = u_n(x) + i v_n(x).$$

Тогда

$$|u_n(x)| \leq C, \qquad |v_n(x)| \leq C$$

и

$$|u_n(x) - u_n(x')| < \varepsilon, \quad |v_n(x) - v_n(x')| < \varepsilon$$

при

$$|x - x'| < \delta \qquad (x, x' \in A).$$

Таким образом, последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ удовлетворяют условиям теоремы Арцела. Поэтому из последовательности $\{u_n(x)\}$ можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_n}(x)\} = \{u_{n,1}(x)\}$. Рассмотрим соответствующую подпоследовательность $\{v_{k_n}(x)\} = \{v_{n,1}(x)\}$. Она удовлетворяет условиям теоремы Арцела и поэтому из нее можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность

$$\{v_{\ell_n,1}(x)\} = \{v_{n,2}(x)\}.$$

Пусть

$$\{u_{\ell_n,1}(x)\} = \{u_{n,2}(x)\}.$$

Тогда последовательность $\{f_{n,2}(x)\}$, где

$$f_{n,2}(x) = u_{n,2}(x) + i v_{n,2}(x),$$

является подпоследовательностью по отношению к $\{f_n(x)\}$, причем последовательности $\{u_{n,2}(x)\}$ и $\{v_{n,2}(x)\}$ равномерно сходятся. Поэтому последовательность $\{f_{n,2}(x)\}$

является равномерно сходящейся, что и требовалось доказать.

Для последовательностей вектор-функций теорема Арцела доказывается аналогично, только вместо перебора действительных и мнимых частей функций $f_n(x)$ следует последовательно перебирать компоненты $f_{n,k}(x)$ вектор-функций $f_n(x)$ и использовать неравенства:

$$|f_{n,k}(x)| \leq |f_n(x)|,$$

$$|f_{n,k}(x) - f_{n,k}(x')| \leq |f_n(x) - f_n(x')|.$$

Глава 8. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ I. Измеримые множества (по Жордану)

Для многомерных множеств можно ввести понятия, аналогичные понятию длины отрезка. Это так называемая мера множества. В двумерном случае понятие меры совпадает с понятием площади, в трехмерном – с понятием объема. Сначала введем понятие меры для простейшего множества – многомерного прямоугольного параллелепипеда. Итак, пусть множество A в пространстве переменных $(x_1, .., x_m)$ – параллелепипед

$$a_i \leq x_i \leq a_i + h_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

(в двумерном и трехмерном случаях это будет, соответственно, прямоугольник и параллелепипед со сторонами, параллельными координатным осям).

Меру этого множества назовем mA и определим следующим образом $mA = \prod_{i=1}^{m} h_i$.

Если $h_i = h$ (h_i не зависят от i), то параллелепипед будет кубом. Рассмотрим теперь множество A , составсоставленное из параллелепипедов A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), пересекающихся разве что по своим границам. Такое множество будем называть элементарной фигурой. Определим меру элементарной фигуры следующим образом:

$$mA = \sum_{j=1}^{n} mA_j .$$

Меру пустого множества будем считать равной нулю. Отметим ряд свойств меры элементарных фигур:(Доказательства их элементарны, и мы не будем на них останавливаться.)

а) если $A \subset B$, то $mA \leq mB$;

б) объединение двух элементарных фигур A и B ($A + B$) есть элементарная фигура и $m(A+B) \leq mA + mB$. Равенство будет лишь в случае, если множества A и B пересекаются разве что по части границ;

в) если элементарную фигуру A рассечь плоскостью $x_j = const$, параллельной одной из осей (с номером j), то она разделится на две элементарные фигуры A' и A'' , причем $mA = mA' + mA''$. С помощью понятия меры элементарной фигуры можно ввести понятие меры любого множества. Для этого в m - мерном пространстве рассмотрим сеть, составленную из кубов $k_j h \leq x_j \leq (k_j + 1) h$,

$$j = 1, 2, \ldots, m \qquad (k_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$h = \frac{1}{2^N} ,$$

N - целое положительное число. С увеличением N на единицу каждый куб прежней сети делится на 2^m кубов. Если A - ограниченное множество в m -мерном пространстве, то можно рассмотреть элементарные фигуры $\bar{A}_N$ и $\underline{A}_N$, составленные из кубов сети, причем $\bar{A}_N$ состоит из всех кубов, которые

содержат хотя бы одну точку множества A , а $\underline{A}_N$ состоит из всех кубов, которые, в свою очередь, состоят из внутренних точек множества A. Если мы увеличиваем N , то, очевидно, что величина $m\bar{A}_N$ может лишь уменьшиться, а величина $m\underline{A}_N$ может лишь увеличиться. Таким образом, последовательности $\{m\bar{A}_N\}$ и $\{m\underline{A}_N\}$ будут монотонными, причем $m\underline{A}_N \le m\bar{A}_N$.
Так как

$$m\bar{A}_N \le m\bar{A}_1 , \ m\underline{A}_N \ge m\underline{A}_1 , \text{ то } \quad m\underline{A}_N \le m\bar{A}_1 , \ m\bar{A}_N \ge m\underline{A}_1 ,$$

и мы видим, что последовательность $\{m\bar{A}_N\}$ является невозрастающей и ограниченной снизу, а последовательность $\{m\underline{A}_N\}$ является неубывающей и ограниченной сверху. Следовательно, существуют пределы $m_i A = \lim\limits_{N\to\infty} m\underline{A}_N$ и $m_e A = \lim\limits_{N\to\infty} m\bar{A}_N$, которые называются, соответственно, внутренней и внешней мерой множества A , по Жордану. Множество A называется измеримым по Жордану, если $m_i A = m_e A = mA$.

Число mA называется мерой множества A по Жордану. (Слова "по Жордану" мы не всегда будем добавлять, в целях краткости.) Отметим некоторые свойства измеримых множеств, кроме очевидного свойства: измеримое множество ограничено.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы ограниченное множество A было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы его граница Γ имела меру, равную нулю.

<u>Доказательство</u>. Фигура $\bar{A}_N$ отличается от фигуры $\underline{A}_N$ кубами, которые содержат граничные точки множества A , т.е. $m\bar{A}_N = m\underline{A}_N + m\bar{\Gamma}_N$. Поэтому, при условии измеримости множества A , т.е. $\lim\limits_{N\to\infty} m\bar{A}_N = \lim\limits_{N\to\infty} m\underline{A}_N$, получим $\lim\limits_{N\to\infty} m\bar{\Gamma}_N = 0$. Так как $0 \le m\underline{\Gamma}_N \le m\bar{\Gamma}_N$,

то и $\lim\limits_{N\to\infty} m\underline{\Gamma}_N = 0$, т.е. $m\Gamma = \lim\limits_{N\to\infty} m\bar{\Gamma}_N = \lim\limits_{N\to\infty} m\underline{\Gamma}_N = 0$.

Предположим теперь, что множество Γ измеримо и $m\Gamma = 0$. Это означает, что $\lim\limits_{N\to\infty} m\bar{\Gamma}_N = 0$, т.е. $\lim\limits_{N\to\infty} m\underline{A}_N = \lim\limits_{N\to\infty} m\bar{A}_N$. Поэтому множество A измеримо. Теорема доказана.

Укажем примеры множеств меры нуль, могущих быть частями границ измеримых множеств.

<u>Теорема</u>. Если точки $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ в пространстве $(m-1)$ измерений принадлежат замкнутому ограниченному множеству M и функция $f(x_1, \ldots, x_{m-1})$ непрерывна на этом множестве, то множество S , задаваемое уравнением

$$x_m = f(x_1, \ldots, x_{m-1}) \quad (\qquad (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in M)$$

имеет в m -мерном пространстве меру, равную нулю.

<u>Доказательство</u>. Так как функция $f(x_1, \ldots, x_{m-1})$ равномерно непрерывна на множестве M, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|f(x_1', \ldots, x_{m-1}') - f(x_1, \ldots, x_{m-1})| < \varepsilon ,$$

если $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m-1} (x_i' - x_i)^2} < \delta$. Таким образом, для точек множества S имеем:

$$|x_m' - x_m| < \varepsilon \quad , \text{ если } \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} (x_i' - x_i)^2} < \delta .$$

Рассмотрим сетку, составленную из кубов с длиной стороны меньшей $\delta/\sqrt{m}$:

$$k_i h \le x_i \le (k_i + 1)h , \quad h = \frac{1}{2^N}, \quad k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В пространстве переменных $(x_1, \dots, x_{m-1})$ при этом возникает сеть из кубов размерности $m-1$ с длиной стороны равной h.

Так как множество M ограничено и функция $x_m = f(x_1, \dots, x_{m-1})$ является ограниченной, то множество точек $(x_1, \dots, x_m)$, где $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in M$, $x_m = f(x_1, \dots, x_{m-1})$ ограничено и, следовательно, существует в m -мерном пространстве куб с длиной стороны ℓ (ℓ – целое число), составленный из кубов сети, который содержит в себе это множество. Рассмотрим входящие в этот куб кубы сети $k_i h \leq x_i \leq (k_i + 1) h$ с фиксированными числами $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$. Число таких кубов равно $\frac{\ell}{h}$. Из них содержат точки множества S те кубы, у которых переменная x_m изменяется не больше, чем на ε, так как для любых двух точек $(x_1, \dots, x_{m-1})$ и $(x_1', \dots, x_{m-1}')$ одного $(m-1)$ -мерного куба выполняется неравенство $\sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} (x_i' - x_i)^2} \leq h\sqrt{m} < \delta$. Число этих кубов не превышает $\frac{\varepsilon}{h} + 2$, т.е. меньше полного числа кубов при фиксированных числах

$$k_1, \dots, k_{m-1} \text{ в } \frac{\frac{\varepsilon}{h} + 2}{\frac{\ell}{h}} = \frac{\varepsilon + 2h}{\ell} \text{ раз} .$$

Так как эти рассуждения справедливы при любых значениях $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$, то общая мера кубов, содержащих точки множества S, не превышает $\frac{\varepsilon + 2h}{\ell} \cdot \ell^m$, откуда $m\bar{S}_N \leq \frac{\varepsilon + 2h}{\ell} \cdot \ell^m$. Ввиду произвольной малости чисел ε, h получим, что $\lim_{N \to \infty} m\bar{S}_N = 0$.

Но $m\underline{S}_N \leq m\bar{S}_N$. Поэтому $\lim_{N\to\infty} m\underline{S}_N = \lim_{N\to\infty} m\bar{S}_N = mS = 0$.

Теорема доказана.

<u>Теорема</u>. Пусть множества A_i $(i=0,1,\dots,n-1)$ – измеримы. Тогда множества $A=\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ и $\tilde{A}=\bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$ измеримы. Если, кроме того, множества A_i пересекаются разве лишь по части границ, то $mA=\sum_{i=0}^{n-1} mA_i$.

<u>Доказательство</u>. Граница Γ множества A может состоять лишь из граничных точек множеств A_i. Поэтому $m\bar{\Gamma}_N \le \sum_{i=0}^{n-1} m\bar{\Gamma}_{iN}$. Но $\lim_{N\to\infty} m\bar{\Gamma}_{iN}=m\Gamma_i=0$.

Поэтому

$$m\Gamma=\lim_{N\to\infty} m\bar{\Gamma}_N=\lim_{N\to\infty} m\underline{\Gamma}_N=0,$$

т.е. множество A измеримо. Аналогично доказывается измеримость множества $\tilde{A}$. Пусть теперь множества A_i пересекаются разве лишь по части границ. Рассмотрим сеть из кубов с длиной стороны $h=\frac{1}{2^N}$. Кубы, входящие в элементарную фигуру $\underline{A}_N$, можно разбить на две группы: 1) кубы, входящие в одно из множеств $\underline{A}_{iN}$; 2) кубы, имеющие общие точки с границами множеств A_i. Обозначим через α_N меру кубов второй группы. Очевидно, что $\alpha_N\to 0$ при $N\to\infty$, так как

$$\sum_{i=0}^{n-1} m\Gamma_i=0.$$

Имеем: $m\underline{A}_N=\sum_{i=0}^{n-1} m\underline{A}_{iN}+\alpha_N$.

Переходя к пределу при $N\to\infty$, получим $mA=\sum_{i=0}^{n-1} mA_i$, что и требовалось доказать.

§ 2. Понятие кратного интеграла (по Риману)

Пусть A - измеримое множество в m -мерном пространстве, на котором задана функция $f(x)$. Разобьем это множество на измеримые части A_i, пересекающиеся друг с другом разве что по части границ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Обозначим это разбиение через R. Выберем в каждом из множеств A_i по одной точке ξ_i и составим сумму

$$S_R(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) m A_i \quad (\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})).$$

Множества A_i будем называть частичными множествами, соответствующими разбиению R множества A. Обозначим через Δ наибольший из диаметров множеств A_i (диаметр множества A_i - точная верхняя грань чисел $|x - x'|$, где $x, x' \in A_i$).

Определение. Число S называется пределом интегральных сумм $S_R(\xi)$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого разбиения R, удовлетворяющего условию $\Delta < \delta$ при любом выборе точек ξ_i, выполняется неравенство:

$$|S_R(\xi) - S| < \varepsilon.$$

Условная запись: $S = \lim\limits_{\Delta \to 0} S_R(\xi)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется интегрируемой на измеримом множестве A (по Риману), если существует предел интегральных сумм этой функции при $\Delta \to 0$. Предел S называется m - кратным интегралом от функции $f(x)$ по множеству A и обозначается символами:

либо $S=\int\limits_A f(x)\,dx$, либо

$$S=\iint\limits_A\ldots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m .$$

Приведем также другие часто используемые обозначения: для двукратного интеграла - $\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy$, $\int\limits_S f(x,y)\,ds$;

для трехкратного интеграла -

$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, $\int\limits_V f(x,y,z)\,dv$, $\int\limits_V f(\vec{r})\,d\vec{r}$ ($\vec{r}$ - радиус-вектор точки с координатами (x, y, z)).

Заметим, что из определения кратного интеграла вытекает, что при $f(x)=c$ (c - некоторая постоянная) имеем $S=c\cdot mA$. Кроме того, как нетрудно видеть, в случае, когда $mA=0$, будем иметь $\int\limits_A f(x)\,dx=\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,mA_i=$ $=0$ для любой функции $f(x)$, определенной на множестве A , даже если она не ограничена на этом множестве. Таким образом, для кратных интегралов из интегрируемости функции $f(x)$ не вытекает ее ограниченность. В дальнейшем мы при рассмотрении кратных интегралов будем дополнительно предполагать ограниченность функции $f(x)$. Рассмотрим условия, обеспечивающие интегрируемость функции. Для этого, как и в случае определенного интеграла от функций одной переменной, нам понадобится рассмотрение так называемых сумм Дарбу.

§ 3. Верхние и нижние суммы Дарбу

Условия интегрируемости функций

Пусть функция $f(x)$ задана на измеримом множестве A

и ограничена на этом множестве. Рассмотрим разбиение R множества A на частичные множества A_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$, которые будем предполагать измеримыми.

Обозначим

$$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in A_i} f(x).$$

Если $|f(x)| \le M$, то $-M \le m_i \le M_i \le M$.

Составим интегральные суммы, взяв вместо значения $f(\xi_i)$ величины M_i и m_i:

$$\bar{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot mA_i, \quad \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot mA_i \quad .$$

Суммы $\bar{S}_R$ и $\underline{S}_R$ называются верхней и нижней суммами Дарбу от функции $f(x)$, соответствующими разбиению R множества A.

Так как $\underline{S}_R \le S_R(\xi) \le \bar{S}_R$, то в случае, если существуют равные друг другу пределы $\lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{S}_R$ и $\lim\limits_{\Delta \to 0} \bar{S}_R$, то функция $f(x)$ интегрируема на множестве A. Покажем, что это условие можно заменить более слабым:

$$\lim_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0 \quad .$$

Для доказательства нам понадобятся свойства сумм Дарбу, аналогичные свойствам этих сумм для определенного интеграла. Введем прежде некоторые обозначения. Если разбиение R_2 получается из разбиения R_1 дополнительным разбиением его частичных множеств, то это обстоятельство будем записывать следующим образом: $R_1 \subset R_2$. Пусть теперь R_1 и R_2 – произвольные разбиения множества A. Пусть частичными мно-

жествами разбиения R_1 будут множества A_i $(i=0,1,\dots,n-1)$, а частичными множествами разбиения R_2 будут множества A'_j $(j=0,1,\dots,\ell-1)$. Если мы рассмотрим все возможные пересечения множеств A_i со множествами A'_j, то возникает более детальное разбиение. Действительно, каждая точка множества A принадлежит хотя бы одному из множеств $A_i \cap A'_j$, причем множества $A_i \cap A'_j$ пересекаются разве лишь по части границ в силу такого же свойства множеств A_i и A'_j. Разбиение R_3 множества A на множества $A_i \cap A'_j$ называется объединением разбиений R_1 и R_2 и обозначается через $R_1 + R_2$. Очевидно, что в случае, когда $R_3 = R_1 + R_2$, то $R_1 \subset R_3$ и $R_2 \subset R_3$, так как при переходе, например, от разбиения R_1 к разбиению R_3 каждое частичное множество разбивается на части.

Теорема. Пусть R_1 и R_2 — разбиения множества A, причем $R_1 \subset R_2$. Тогда $\underline{S}_{R_1} \leq \underline{S}_{R_2}$, $\bar{S}_{R_1} \geq \bar{S}_{R_2}$. Если же R_1 и R_2 произвольные разбиения множества A, то $\underline{S}_{R_1} \leq \bar{S}_{R_2}$.

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно ограничиться случаем, когда разбиение R_2 получается из R_1 дополнительным разбиением одного частичного множества A_k на множества A'_k и A''_k. Пусть

$$M_k = \sup_{x\in A_k} f(x), \quad M'_k = \sup_{x\in A'_k} f(x), \quad M''_k = \sup_{x\in A''_k} f(x);$$

аналогично определяются точные нижние грани m_k, m_k', m_k''. Тогда $M_k' \le M_k$, $M_k'' \le M_k$, $m_k' \ge m_k$, $m_k'' \ge m_k$.

Сумма Дарбу $\bar{S}_{R_2}$ отличается от суммы $\bar{S}_{R_1}$ тем, что слагаемое $M_k \cdot mA_k$ заменяется на $M_k' \cdot mA_k' + M_k'' \cdot mA_k''$. Но $mA_k = mA_k' + mA_k''$. Поэтому

$$M_k' \cdot mA_k' + M_k'' \cdot mA_k'' \le M_k \cdot mA_k' + M_k \cdot mA_k'' = M_k \cdot mA_k,$$

откуда $\bar{S}_{R_1} \ge \bar{S}_{R_2}$. Аналогично доказывается, что $\underline{S}_{R_1} \le \underline{S}_{R_2}$. Для доказательства второй части теоремы рассмотрим разбиение $R_3 = R_1 + R_2$. Так как $R_1 \subset R_3$ и $R_2 \subset R_3$, то мы приходим к следующим неравенствам:

$\underline{S}_{R_1} \le \underline{S}_{R_3} \le \bar{S}_{R_3} \le \bar{S}_{R_2}$, т.е. $\underline{S}_{R_1} \le \bar{S}_{R_2}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, верхние суммы Дарбу ограничены снизу, а нижние суммы Дарбу ограничены сверху. Поэтому существуют величины

$$\inf_R \bar{S}_R = \bar{S} \quad \text{и} \quad \sup_R \underline{S}_R = \underline{S}.$$

Величины $\bar{S}$ и $\underline{S}$ называются, соответственно, верхним и нижним интегралом Дарбу от функции $f(x)$ по множеству A. Из неравенства $\bar{S}_{R_2} \ge \underline{S}_{R_1}$ для произвольных разбиений R_1 и R_2 вытекает неравенство $\bar{S}_{R_2} \ge \bar{S} \ge \underline{S} \ge \underline{S}_{R_1}$.

Перейдем к рассмотрению условий интегрируемости функции $f(x)$ на измеримом множестве A.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы ограниченная на измеримом множестве A функция $f(x)$ была интегрируемой (по Риману) на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\Delta \to 0}(\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$

при любых способах разбиения R множества A.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на множестве A и интеграл $\int_A f(x)\,dx$ равен S. Это значит, что при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что $|S_R(\xi) - S| < \varepsilon_1$, если $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек ξ_i. В таком случае при двух способах выбора точек ξ_i, $\xi_i = \xi_i'$ и $\xi_i = \xi_i''$, будем иметь:

$$|S_R(\xi') - S_R(\xi'')| = |[S_R(\xi') - S] + [S - S_R(\xi'')]| \le$$

$$\le |S_R(\xi') - S| + |S_R(\xi'') - S| < 2\varepsilon_1 .$$

Так как $M_i = \sup\limits_{x \in A_i} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in A_i} f(x)$,

то на множестве A_i найдутся такие точки ξ_i' и ξ_i'', что $M_i - \varepsilon_1 \le f(\xi_i') \le M_i$, $m_i \le f(\xi_i'') \le m_i + \varepsilon_1$.

При таком выборе точек ξ_i' и ξ_i'' имеем:

$$\bar{S}_R - S_R(\xi') = \sum_{i=0}^{n-1} [M_i - f(\xi_i')] mA_i \le \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{n-1} mA_i = \varepsilon_1 \cdot mA ,$$

$$S_R(\xi'') - \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i'') - m_i] mA_i \le \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{n-1} mA_i = \varepsilon_1 \cdot mA .$$

Поэтому

$$\bar{S}_R - \underline{S}_R = [\bar{S}_R - S_R(\xi')] + [S_R(\xi'') - \underline{S}_R] +$$

$$+ [S_R(\xi') - S_R(\xi'')] < 2\varepsilon_1 [mA + 1], \qquad \Delta < \delta .$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Выберем ε_1 из условия $2\varepsilon_1 [mA + 1] = \varepsilon$. Тогда при $\Delta < \delta = \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\Delta \to 0} [\bar{S}_R - \underline{S}_R] = 0$.

<u>Достаточность</u>. Пусть $\lim\limits_{\Delta \to 0} [\bar{S}_R - \underline{S}_R] = 0$.

Так как $\underline{S}_R \leq \underline{S} \leq \bar{S} \leq \bar{S}_R$, то $\bar{S} - \underline{S} \leq \bar{S}_R - \underline{S}_R$,

т.е. $\bar{S} = \underline{S} = S$. Покажем, что число S является пределом интегральных сумм при $\Delta \to 0$. В силу соотношения $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\bar{S}_R - \underline{S}_R < \delta$, если $\Delta < \delta$.

Но $\underline{S}_R \leq S_R(\xi) \leq \bar{S}_R$, $\underline{S}_R \leq S \leq \bar{S}_R$.

Отсюда $|S_R(\xi) - S| \leq \bar{S}_R - \underline{S}_R < \varepsilon$, если $\Delta < \delta$, что и требовалось доказать.

Условие теоремы можно переписать в виде:

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \, mA_i = 0,$$

где величина $\omega_i = M_i - m_i = \sup\limits_{x, x' \in A_i} |f(x) - f(x')|$ называется колебанием функции $f(x)$ на множестве A_i.

<u>Следствия</u>. I. Пусть A и B - два измеримых множества и $B \subset A$. Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве A, то она интегрируема и на множестве B.

2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве A. Тогда функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом множестве.

<u>Доказательство</u>. I. Имеем $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$.

Пусть R' произвольное разбиение множества B с максимальным диаметром частичных множеств равным Δ. Дополним разбиение R' до разбиения R множества A, добавляя новые измеримые множества с диаметром, меньшим Δ. Так как $\bar{S}_{R'} - \underline{S}_{R'} \leq \bar{S}_R - \underline{S}_R$, то $\lim_{\Delta \to 0} [\bar{S}_{R'} - \underline{S}_{R'}] = 0$,

т.е. функция $f(x)$ интегрируема на множестве B.

2. Исходим из неравенства:

$$\big||f(x)| - |f(x')|\big| \leq |f(x) - f(x')|.$$

Отсюда

$$\bar{\omega}_i = \sup_{x, x' \in A_i} \big||f(x)| - |f(x')|\big| \leq \sup_{x, x' \in A_i} |f(x) - f(x')| = \omega_i.$$

Поэтому из условия $\lim \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot mA_i = 0$ вытекает,

что $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\omega}_i \cdot mA_i = 0$. Следовательно, функция

$|f(x)|$ интегрируема на множестве A. ($\bar{\omega}_i$ - колебание функции $|f(x)|$ на множестве A_i).

Мы имеем общее условие интегрируемости функций. Рассмотрим классы функций, удовлетворяющих этому условию.

Теорема. Функция $f(x)$, непрерывная на замкнутом измеримом множестве A_i, интегрируема на этом множестве.

Доказательство. Так как множество A измеримо, то оно ограничено. Кроме того, оно замкнуто. Поэтому функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве A, т.е. при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, если $|x - x'| < \delta$ $(x', x \in A)$.

Пусть R - произвольное разбиение множества A на частичные множества с наибольшим диаметром Δ, меньшим вели-

чины δ . Тогда $\omega_i = \sup\limits_{x,x' \in A_i} |f(x)-f(x')| \le \varepsilon$,

так как на множестве A_i будет $|x - x'| < \delta$.
Поэтому

$$\bar{S}_R - \underline{S}_R = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \, mA_i \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} mA_i = \varepsilon \cdot mA ,$$

т.е. $\lim\limits_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$.

Следовательно функция $f(x)$ интегрируема на множестве A . Теорема доказана.

Условия рассмотренной теоремы можно несколько ослабить.

Теорема. Функция $f(x)$, ограниченная на замкнутом измеримом множестве A и непрерывная на множестве A за исключением точек, образующих множество B меры, равной нулю, интегрируема на множестве A .

Доказательство. Пусть имеется сеть кубов со стороной $h = \frac{1}{2^N}$: $k_i h \le x_i \le (k_i+1)h$ $(i = 1, 2, \ldots, m,$ $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Так как $mB = 0$, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что $m\bar{B}_N < \varepsilon$.
Рассмотрим вместо каждого куба $k_i h \le x_i \le (k_i + 1) h$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, входящего в элементарную фигуру $\bar{B}_N$, открытый куб со стороной $3h$:

$(k_i - 1)h < x_i < (k_i + 2)$. Объединение этих кубов назовем C_N . Очевидно, что $mC_N = 3^m \varepsilon$.

Рассмотрим произвольное разбиение R множества A на частичные множества A_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, с наибольшим диаметром $\Delta < h$. Разобьем множества A_i на две группы – множества, содержащиеся в C_N и остальные. Так как рас-

стояние от точки, не входящей в множество C_N до произвольной точки множества B_N не меньше h, то множества A_i, входящие во вторую группу, не имеют общих точек с множеством B_N. Оценим колебание функции $f(x)$ на каждом из множеств A_i. Так как функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $A - C_N$, т.е. множестве, состоящем из точек A, не принадлежащих C_N, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ если $|x - x'| < \delta$, где $x, x' \in (A - C_N)$. Пусть $\Delta < \delta$. Тогда для множеств второй группы $\omega_i = \sup\limits_{x, x' \in A_i} |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Для множеств же первой группы, в силу неравенства $|f(x)| \le M$, имеем :

$$|f(x) - f(x')| \le |f(x)| + |f(x')| \le 2M ,$$

т.е. $\omega_i < 2M$. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot mA_i = \sum_i{}' \omega_i \cdot mA_i + \sum_i{}'' \omega_i \cdot mA_i \le 2M \sum_i{}' m \cdot A_i + \varepsilon \sum_i{}'' mA_i .$$

В первой сумме суммирование проводится по множествам первой группы, во второй - по множествам второй группы.

Но $\sum_i{}' mA_i \le mC_N \le 3^m \varepsilon$,

а $\sum_i{}'' mA_i \le mA$. Отсюда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot mA_i < 2M \cdot 3^m \varepsilon + \varepsilon \cdot mA = \varepsilon(2M \cdot 3^m + mA),$$

если $\Delta < \min(\delta, h)$.

В силу произвольности числа ε, имеем $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\, mA_i = 0$,

т.е. функция $f(x)$ интегрируема на множестве A. Теорема доказана.

§ 4. Основные свойства кратного интеграла

При формулировке основных свойств кратного интеграла будем предполагать, что множества, входящие в формулировку этих свойств, измеримы, а функции - интегрируемы.

I. $\int\limits_A [C_1\cdot f_1(x)+C_2\cdot f_2(x)]dx = C_1\int\limits_A f(x)dx + C_2\int\limits_A f_2(x)dx$.

2. Пусть множество A разбито на два множества B и C, пересекающихся разве что по части границ.

Тогда $\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_B f(x)dx + \int\limits_C f(x)\,dx$.

3. Если $f(x)\le g(x)$ на множестве A, то

$$\int\limits_A f(x)\,dx \le \int\limits_A g(x)\,dx .$$

4. $$\left|\int\limits_A f(x)dx\right| \le \int\limits_A |f(x)|\,dx .$$

5. Пусть $M=\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in A} f(x)$

и $g(x)\ge 0$ на множестве A. Тогда

$$\int\limits_A f(x)\cdot g(x)\,dx = \mu\int\limits_A g(x)\,dx, \qquad m\le\mu\le M.$$

Эта формула называется формулой среднего значения для кратного интеграла. В частности, при $g(x) = 1$ получим:

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \mu \cdot mA \quad \text{, где } m \le \mu \le M.$$

Доказательство. I. Указанное свойство непосредственно вытекает из аналогичного свойства для интегральных сумм.

2. Пусть R_1 – произвольное разбиение множества B, R_2 – – произвольное разбиение множества C. В результате объединения частичных множеств возникает разбиение R множества A. Поэтому $S_R(\xi) = S_{R_1}(\xi) + S_{R_2}(\xi)$.

Пусть наибольшие диаметры частичных множеств при разбиениях R_1, R_2 будут Δ_1 и Δ_2, а $\Delta = max(\Delta_1, \Delta_2)$.

Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим:

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_B f(x)\,dx + \int\limits_C f(x)\,dx .$$

3. Положим $h(x) = f(x) - g(x)$. Тогда $h(x) \ge 0$ и

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i) \cdot mA_i \ge 0$$

при любом разбиении R множества A. Переходя к пределу при $\Delta \to 0$, получим:

$$\int\limits_A h(x)\,dx \ge 0,$$

откуда $\int\limits_A f(x)\,dx \ge \int\limits_A g(x)\,dx$.

4. Имеем $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$.

Поэтому $-\int\limits_A |f(x)|\,dx \le \int\limits_A f(x)\,dx \le \int\limits_A |f(x)|\,dx$,

т.е. $\left|\int\limits_A f(x)dx\right| \le \int\limits_A |f(x)|\,dx$.

5. Так как $m\cdot g(x) \le f(x)\cdot g(x) \le M\cdot g(x)$,

то $m\int\limits_A g(x)\,dx \le \int\limits_A f(x)g(x)\,dx \le M\int\limits_A g(x)\,dx$.

Предположим, что $\int\limits_A g(x)\,dx > 0$. Тогда, обозначив через μ величину $\mu = \dfrac{\int_A f(x)\cdot g(x)\,dx}{\int\limits_A g(x)\,dx}$, получим $m \le \mu \le M$.

Таким образом,

$$\int\limits_A f(x)\cdot g(x)\,dx = \mu\int\limits_A g(x)\,dx, \qquad m \le \mu \le M .$$

Это соотношение остается справедливым и при $\int\limits_A g(x)\,dx = 0$, так как в этом случае $\int\limits_A f(x)\cdot g(x)\,dx = 0$.

§ 5. Приведение кратных интегралов к повторным интегралам

Кратные интегралы при довольно общих предположениях могут быть приведены к интегралам меньшей кратности. Рассмотрим сначала такое приведение в случае, когда множество A , по которому происходит интегрирование, является m - мерным параллелепипедом

$$a_i \le x_i \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) .$$

__Теорема__. Пусть функция $f(x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_m))$ определена в m - мерном параллелепипеде $a_i \le x_i \le b_i$ и существует m - кратный интеграл $\int\limits_A f(x)\,dx$.

Тогда:

I. Если при каждом фиксированном значении x_1 из сегмента $[a_1, b_1]$ существует $(m-1)$ - кратный интеграл

$$J(x_1) = \int_B f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_m ,$$

где: B - $(m-1)$ - мерный параллелепипед

$a_i \le x_i \le b_i \quad (i = 2, 3, \ldots, m)$, то существует также повторный интеграл $\int_{a_1}^{b_1} J(x_1)\, dx_1$, причем

$$\int_A f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} J(x_1) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_B f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_2, \ldots, dx_m .$$

2. Если при фиксированных значениях $(x_2, \ldots, x_m)$ существует определенный интеграл

$$I(x_2, \ldots, x_m) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1 ,$$

то существует также повторный интеграл $\int_B I(x_2, \ldots, x_m) dx_2 dx_3 \ldots dx_m$,

причем $\int_A f(x) dx = \int_B I(x_2, \ldots, x_m) dx_2\, dx_3 \ldots dx_m =$

$$= \int_B dx_2\, dx_3 \ldots dx_m \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1 .$$

Доказательство. Разобьем параллелепипед B на N частичных параллелепипедов B_k $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$, а сегмент $[a_1, b_1]$ разобьем на M частичных сегментов C_ℓ $(\ell = 0, 1, \ldots, M-1)$. Тогда возникает разбиение R параллелепипеда A на $N \cdot M$ частичных параллелепипедов $A_{\ell k}$: $x_1 \in C_\ell$, $(x_2, \ldots, x_m) \in B_k$. Очевидно, что $m A_{\ell k} = m B_k \cdot h_\ell$ (h_ℓ - длина сегмента C_ℓ). Пусть

$$m_{\ell k} = \inf_{x \in A_{\ell k}} f(x), \quad M_{\ell k} = \sup_{x \in A_{\ell k}} f(x).$$

Если $\xi_{1\ell} \in C_\ell$, то по формуле среднего значения для кратных интегралов получим:

$$m_{\ell k} \cdot mB_k \le \int_{B_k} f(\xi_{1\ell}, x_2, \ldots, x_m)\, dx_2 \ldots dx_m \le M_{\ell k} \cdot mB_k .$$

Отсюда

$$\sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} m_{\ell k} \cdot mA_{\ell k} \le \sum_{\ell=0}^{M-1} J(\xi_{1\ell}) h_\ell \le \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} M_{\ell k} \cdot mA_{\ell k} ,$$

т.е.

$$\underline{S}_R \le \sum_{\ell=0}^{M-1} J(\xi_{1\ell}) \cdot h_\ell \le \bar{S}_R .$$

Так как для интеграла $\int_A f(x)\,dx$ справедливы подобные же оценки $\underline{S}_R \le \int_A f(x)\,dx \le \bar{S}_R$.

то $\left| \sum_{\ell=0}^{M-1} J(\xi_{1\ell}) \cdot h_\ell - \int_A f(x)\,dx \right| \le \bar{S}_R - \underline{S}_R$.

В силу интегрируемости функции $f(x)$ на множестве A имеем $\lim_{\Delta \to 0} (\bar{S}_R - \underline{S}_R) = 0$ (Δ - наибольший из диаметров множеств $A_{\ell k}$). Поэтому, в силу того, что $h_\ell \to 0$ при $\Delta \to 0$, мы убеждаемся в существовании предела для интегральных сумм функции $J(x_1)$ по сегменту $[a_1, b_1]$ и в равенстве $\int_A f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} J(x_1)\,dx$.

Первая часть теоремы доказана. Вторая часть теоремы доказывается аналогично с помощью неравенства:

$$\sum_{\ell=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} m_{\ell k}\cdot mA_{\ell k} \le \sum_{k=0}^{N-1} I(\xi_{2k}, \xi_{3k}, \dots, \xi_{mk})\, mB_k \le$$

$$\le \sum_{\ell=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} M_{\ell k}\cdot mA_{\ell k} ,$$

где $(\xi_{2k}, \dots, \xi_{mk}) \in B_k$.

Теорема доказана.

Обобщим теперь теорему на общий случай, когда A является произвольным измеримым множеством, а функция $f(x)$ интегрируема на этом множестве. Для этого заключим множество A в некоторый m - мерный параллелепипед $\bar{A}$ и доопределим функцию $f(x)$ на этом параллелепипеде, полагая ее равной нулю при $x \bar{\in} A$.

Очевидно, что $\int\limits_{\bar{A}} f(x)dx = \int\limits_{A} f(x)\,dx$.

Интеграл $J(x_1) = \int\limits_{\bar{B}} f(x_1, x_2, \dots, x_m)dx_2, \dots, dx_m$

сведется к интегралу $\int\limits_{B(x_1)} f(x_1, x_2, \dots, x_m)dx_2, \dots, dx_m$,

где $B(x_1)$ есть множество всех точек $(x_2, \dots, x_m)$, удовлетворяющих при фиксированном значении x_1 , условию $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in A$. В результате мы приходим к равенству:

$$\int\limits_{A} f(x)dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{B(x_1)} f(x_1, x_2, \dots, x_m)dx_2 \dots dx_m .$$

Аналогично можно получить равенство:

$$\int\limits_A f(x)dx=\int\limits_{B} dx_2,\dots,dx_m \int\limits_{C(x_2,\dots,x_m)} f(x_1,x_2,\dots,x_m)\,dx_1 .$$

Здесь $C(x_2,\dots,x_m)$ - множество точек x_1, которые при фиксированных значениях $x_2,\dots,x_m$ удовлетворяют условию $(x_1,x_2,\dots,x_m)\in A$. При практических вычислениях множество A разбивают на части, в каждой из которых множество $C(x_2,\dots,x_m)$ - сегмент

$$[\varphi_1(x_2,\dots,x_m),\ \varphi_2(x_2,\dots,x_m)].$$

Способ такого разбиения для двукратного интеграла указан на рисунке. В данном случае множество A удобно разбить на два множества, в каждом из которых прямая, параллельная оси x_1 пересекает множество лишь в двух точках.

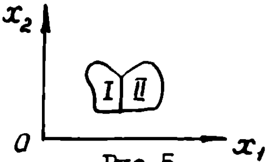


Рис.5

Мы разбили переменные (x_1, x_2, x_m) на две группы x_1, и $(x_2,\dots,x_m)$. Можно произвести разбиение на другие группы и получить аналогичные формулы. Если возможно сведение кратного интеграла к повторным двумя способами, то мы получаем равенство двух таких повторных интегралов.

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_S xy\,dx\,dy$, где S - внутренность круга $x^2+y^2\le 1$, ограниченная прямой $2x+y=1$ (см.рисунок).

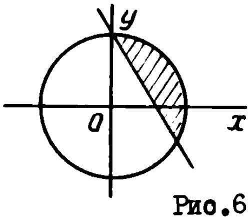


Рис.6

Точки пересечения окружности $x^2+y^2=1$ и прямой $2x+y=1$ будут $x=0$, $y=1$ и $x=\frac{4}{5}$, $y=-\frac{3}{5}$.

Переменная y меняется в пределах от $y=-\frac{3}{5}$ до $y=1$,

переменная x при фиксированном значении y меняется от $x=\frac{1-y}{2}$ до $x=\sqrt{1-y^2}$.

Поэтому

$$\int\limits_S xy\,dx\,dy=\int\limits_{-\frac{3}{5}}^{1} y\,dy\int\limits_{\frac{1-y}{2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\frac{3}{5}}^{1} y\cdot\frac{1}{2}\left[1-y^2-\left(\frac{1-y}{2}\right)^2\right]dy=\frac{32}{125}.$$

§ 6. Замена переменных в кратном интеграле

Теорема. Пусть даны два измеримых множества - множество A в пространстве переменных $x=(x_1,\dots,x_m)$ и множество B в пространстве переменных $t=(t_1,\dots,t_m)$, причем между множествами A и B установлено взаимнооднозначное соответствие с помощью формул:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=x_1(t_1,\dots,t_m)\\ x_2=x_2(t_1,\dots,t_m)\\ \dots\dots\dots\dots\\ x_m=x_m(t_1,\dots,t_m)\end{array}\right\}.$$

Если функции $x_i(t_1,\dots,t_m)$ $(i=1,\dots,m)$ на множестве B имеют непрерывные частные производные первого порядка и якобиан $\mathcal{J}=\frac{D(x_1,\dots,x_m)}{D(t_1,\dots,t_m)}=Det\left\|\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right\|\neq 0$ при $t\in B$,

а функция $f(x)$ интегрируема при $x\in A$, то

$$\int\limits_A f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1,\dots,dx_m =$$

$$= \int\limits_B f[x_1(t_1,\dots,t_m),\dots,x_m(t_1,\dots,t_m)]\cdot|J|\,dt_1,\dots,dt_m \,.$$

<u>Доказательство</u>. Доказательство формулы замены переменных в кратном интеграле проведем по индукции. Доказательство проведем при упрощающих предположениях: всюду, где это понадобится в рассуждениях, будем предполагать возможность сведения кратного интеграла к повторным, причем, если встречается однократный интеграл, то интегрирование сводится к интегрированию по нескольким сегментам.

При любых значениях $t_1,\dots,t_m$ по крайней мере одна из производных $\frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ отлична от нуля в любой фиксированной точке $t = t_0$ (иначе бы $J(t_0) = 0$). В силу непрерывности функция $\frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки t_0. В связи с этим будем также предполагать, что множество B можно разбить на части, в каждой из которых одна из производных $\frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ сохраняет знак, и докажем формулу замены переменных для каждой такой части множества B. Меняя нумерацию переменных $(x_1,\dots,x_m)$ и $(t_1,\dots,t_m)$ можно добиться, чтобы в рассматриваемой области $\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \neq 0$.

Рассмотрим сначала случай $m=1$. Пусть A - сегмент $[a,b]$, B - сегмент $[c,d]$ и функция $x = x(t)$ дает взаимнооднозначное соответствие между точками сегментов. В данном случае $J = x'(t)$, причем $x'(t) \neq 0$. Рассмотрим два случая: $x'(t) > 0$ и

$x'(t) < 0$. В первом случае $x(t)$ возрастающая функция, во втором – убывающая. Поэтому в первом случае $x(c) = a$, $x(d) = b$, а во втором случае $x(c) = b$, $x(d) = a$. По формуле замены переменных для определенного интеграла имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_c^d f[x(t)]\cdot x'(t)dt & \text{при } x'(t) > 0 \\ -\int_c^d f[x(t)]\cdot x'(t)dt & \text{при } x'(t) < 0. \end{cases}$$

В обоих случаях $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[x(t)]\cdot |x'(t)|\,dt$.

Таким образом, формула замены переменных при $m = 1$ доказана. Предположим, что она верна для интеграла кратности $m-1$ и докажем ее для интеграла кратности m. Сведем кратный интеграл к повторному:

$$\int_A f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{A(x_1)} f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_2, \ldots, dx_m .$$

Здесь $A(x_1)$ – множество значений $(x_2, \ldots, x_m)$, удовлетворяющих при фиксированном значении x_1 условию $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A$. Разрешим уравнение $x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_m)$ относительно t_1 (напомним, что $\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \neq 0$ и такая процедура возможна):

$$t_1 = \bar{t}_1(x_1, t_2, \ldots, t_m) .$$

Тогда $x_2(t_1, \ldots, t_m) = \bar{x}_2(x_1, t_2, \ldots, t_m)$,

. . . .

$x_m(t_1, \ldots, t_m) = \bar{x}_m(x_1, t_2, \ldots, t_m)$.

При фиксированном значении x_1 преобразуем с помощью формулы замены переменных $(m-1)$ - кратный интеграл:

$$\int\limits_{A(x_1)} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) dx_2, \ldots, dx_m = \int\limits_{\bar{B}(x_1)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m) \cdot |J^*| dt_2, \ldots, dt_m ,$$

где $$J^* = \frac{D(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)}{D(t_2, \ldots, t_m)} .$$

Отсюда

$$\int\limits_A f(x) dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\bar{B}(x_1)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m) \cdot |J^*| dt_2, \ldots, dt_m .$$

Поменяем порядки интегрирования в повторном интеграле:

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\bar{B}(x_1)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m) \cdot |J^*| dt_2 \ldots dt_m =$$

$$= \int\limits_C dt_2 \ldots dt_m \int\limits_{\angle(t_2, \ldots, t_m)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m) |J^*| dx_1 .$$

Здесь $\angle(t_2, \ldots, t_m)$ - множество значений x_1, которые при фиксированных значениях $(t_2, \ldots, t_m) \in C$ удовлетворяют условию, что точка $(x_1, t_2, \ldots, t_m)$ принадлежит множеству

$$x_1 \in (a_1, b_1), \ (t_2, \ldots, t_m) \in \bar{B}(x_1) .$$

По формуле замены переменных для однократного интеграла имеем:

$$\int\limits_{\angle(t_2, \ldots, t_m)} f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m) |J^*| dx_1 =$$

$$= \int\limits_{B(t_2,\dots,t_m)} f[x_1(t_1,\dots,t_m),\dots,x_m(t_1,\dots,t_m)]\cdot|J^*|\cdot\left|\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right| dt_1 \; .$$

Мы воспользовались тем, что при замене x_1 на $x_1(t_1, t_2, \dots, t_m)$ функции $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ переходят в функции $x_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_m(t_1, t_2, \dots, t_m)$, а множество $L(t_2, \dots, t_m)$ – во множество $B(t_2, \dots, t_m)$.

Так как

$$\int\limits_C dt_2 \dots dt_m \int\limits_{B(t_2,\dots,t_m)} f[(x_1(t_1,\dots,t_m),\dots,x_m(t_1,\dots,t_m)]\cdot|J^*|\left|\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right| dt_1 =$$

$$= \int\limits_B f[x_1(t_1,\dots,t_m),\dots,x_m(t_1,\dots,t_m)]\cdot\left|J^*\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right| dt_1,\dots,dt_m \,,$$

то для полного доказательства достаточно показать, что $J = J^* \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1}$. Напомним, что функции $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ мы получили в результате подстановки функции :

$$t_1 = \bar{t}_1(x_1, t_2, \dots, t_m)$$

в функции $x_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Поэтому

$$x_1 = x_1(\bar{t}_1, t_2, \dots, t_m),$$

$$\bar{x}_2 = x_2(\bar{t}_1, t_2, \dots, t_m),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\bar{x}_m = x_m(\bar{t}_1, t_2, \dots, t_m) \; .$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial \bar t_1}{\partial t_j} + \frac{\partial x_1}{\partial t_j} \\ \frac{\partial \bar x_i}{\partial t_j} &= \frac{\partial x_i}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial \bar t_1}{\partial t_j} + \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \end{aligned}\right\} (i \geq 2,\ j \geq 2).$$

Пользуясь этими соотношениями, преобразуем выражение для J

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_m}{\partial t_1} & \frac{\partial x_m}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}$$

Умножим первый столбец на $\frac{\partial \bar t_1}{\partial t_j}$ и прибавим его к столбцу с номером j. В результате получим:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \bar x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \bar x_2}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_m}{\partial t_1} & \frac{\partial \bar x_m}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial \bar x_m}{\partial t_m} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdot J^*,$$

что и требовалось доказать.

<u>Примеры</u>

I. $S = \int\limits_A f(x,y)\,dx\cdot dy$.

Перейдем к полярным координатам:

$x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$.

В данном случае

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r ,$$

т.е. $\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_B f[r\cos\varphi,\, r\sin\varphi]\, r\, dr\, d\varphi .$

2. $s = \int\limits_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$.

Перейдем к сферическим координатам:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} .$$

В данном случае

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta .$$

Поэтому $\int\limits_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$

$$= \int\limits_B f[r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\varphi]\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi .$$

В рассмотренных примерах в отдельных точках может быть $J = 0$. Это несущественно, так как вместо интегрирования по множеству A можно провести интегрирование по множеству A_ε , получающегося из множества A выбрасыванием ε - окрестностей точек, в которых $J = 0$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ придем к написанным выше результатам. (Рассуждения здесь те же, что и для несобственных интегралов.)

Глава 9. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ I. Кривая в m -мерном пространстве

Множество точек $(x_1, \dots, x_m)$ в m -мерном пространстве, удовлетворяющих равенствам $x_i = x_i(t)$, где $i = 1, 2, \dots, m$, а $x_i(t)$ - непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции, будем называть непрерывной кривой, а переменную t - параметром этой кривой. Краткая запись для точек кривой: $x = x(t)$.

В обычном трехмерном пространстве непрерывные функции $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ могут определять такое множество точек, которое не будет соответствовать, вообще говоря, нашим обычным представлениям о кривой в пространстве. Например, если $x_i(t) = const$, то уравнения $x_i = x_i(t)$ определяют лишь одну точку; кривая, заданная уравнениями $x_i = x_i(t)$, может заполнять некоторый объем, отдельные участки кривой при различных значениях параметра t могут совпадать друг с другом и т.д. Для того, чтобы множество точек, задаваемых уравнением $x = x(t)$, соответствовало нашим интуитивным представлениям о кривой, потребуем, чтобы разным значениям параметра t соответствовали разные точки, т.е. чтобы при $t_2 \neq t_1$ было $|x(t_2) - x(t_1)| \neq 0$. Это условие исключает возможность самопересечения кривой. Можно, однако, допустить, чтобы это условие нарушалось в конечном числе точек. Тогда кривая может иметь конечное число самопересечений (см. рисунок).

Рассмотрим некоторые геометрические характеристики кривой. При $m = 2$ и $m = 3$ вектор $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m)$, $(\Delta x_i = x_i' - x_i)$ направлен по прямой, соединяющей точки $x' = (x_1', \dots, x_m')$ и $x = (x_1, \dots, x_m)$. Поэтому естественно предел

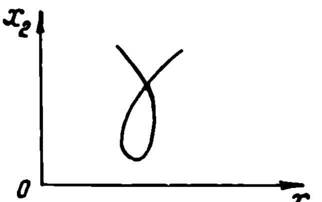


Рис.7

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

считать вектором, направленным по касательной к кривой $x = x(t)$. Введем теперь понятие длины отрезка кривой.

<u>Определение.</u> Пусть кривая $x = x(t)$ имеет конечное число самопересечений, функции $x_i = x_i(t)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, а R – разбиение сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты с длиной не превышающей Δ. Если существует предел

$$\ell = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j)| \quad (t_0 = a, \quad t_n = b),$$

не зависящий от способа разбиения, то он называется длиной отрезка $a \le t \le b$ кривой, а кривая называется спрямляемой.

Отметим, что в трехмерном пространстве сумма $\sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j)|$ является длиной ломаной, проходящей через точки $x(t_j)$.

Рассмотрим условия спрямляемости кривых.

<u>Теорема.</u> Кривая $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ $(t \in [a, b], a < b)$ спрямляема, если функции $x_i'(t)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$ $(i = 1, \dots, m)$, причем длина кривой

$$\ell = \int_a^b |x'(t)|\, dt .$$

<u>Доказательство.</u> Пусть R – произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ на n частичных сегментов $[t_j, t_{j+1}]$ $(t_0 = a, t_n = b)$. Оценим разность между величиной

$$\tilde{\ell}_R = \sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j)|$$

и частичной суммой

$$\ell_R(\xi) = \sum_{j=0}^{n-1} |x'(\xi_j)| \Delta t_j$$

для интеграла

$$\ell = \int_a^b |x'(t)| dt \quad (\xi_i \in [t_j, t_{j+1}], \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j):$$

$$|\tilde{\ell}_R - \ell_R(\xi)| = |\sum_{j=0}^{n-1} [|x(t_{j+1}) - x(t_j)| - |x'(\xi_j)| \Delta t_j]| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-1} ||x(t_{j+1}) - x(t_j)| - |x'(\xi_j)| \Delta t_j| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-1} |x(t_{j+1}) - x(t_j) - x'(\xi_j) \Delta t_j| .$$

Но $|x(t_{j+1}) - x(t_j) - x'(\xi_j)\Delta t_j| = |\int_{t_j}^{t_{j+1}} [x'(t) - x'(\xi_j)] dt| \le$

$$\le \int_{t_j}^{t_{j+1}} |x'(t) - x'(\xi_j)| dt .$$

Оценим подинтегральное выражение:

$$|x'(t) - x'(\xi_j)|^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_i'(t) - x_i'(\xi_j)|^2 \le$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{m} |x_i'(t) - x_i'(\xi_j)|\right]^2 \le \left[\sum_{i=1}^{m} \omega_{ij}\right]^2 ,$$

где

$$\omega_{ij} = \sup_{t,\xi\in[t_j,t_{j+1}]} |x_i'(t) - x_i'(\xi)| -$$

колебание функции $x_i'(t)$ на сегменте $[t_j , t_{j+1}]$.
Таким образом,

$$|\tilde{\ell}_R - \ell_R(\xi)| \le \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{ij} \Delta t_j \right) .$$

Так как функции $x_i'(t)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{ij} \Delta t_j = 0$$

независимо от способа разбиения R сегмента $[a , b]$ ($\Delta = \max \Delta t_j$) , откуда

$$\lim_{\Delta\to 0} | \tilde{\ell}_R - \ell_R(\xi)| = 0 .$$

Но $\lim\limits_{\Delta\to 0} \ell_R(\xi) = \int\limits_a^b |x'(t)| dt$.

Поэтому существует предел суммы

$$\tilde{\ell}_R = \sum_{j=0}^{n-1} | x(t_{j+1}) - x(t_j)|$$

при $\Delta\to 0$, равный $\int\limits_a^b |x'(t)| dt$. Теорема доказана.

Для кривой был использован параметр t. Очевидно, что мы получим при $a \leq t \leq b$ то же множество точек, если вместо параметра t рассмотрим любой другой параметр τ, связанный с параметром t соотношением $t = f(\tau)$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$, если при $\alpha \leq \tau \leq \beta$ переменная t пробегает сегмент $[a, b]$. Для того, чтобы каждая точка кривой не была пройдена дважды, естественно потребовать, чтобы функция $f(\tau)$ была строго монотонной, т.е. $f'(\tau) \neq 0$ при $\alpha \leq \tau \leq \beta$. При этом возникает два класса допустимых параметров: параметры, для которых $f'(\tau) > 0$, и параметры, для которых $f'(\tau) < 0$. В первом случае точки кривой $x = x[f(\tau)]$ с ростом τ пробегаются в той же последовательности, что и для кривой $x = x(t)$, во втором случае точки кривой пробегаются в обратной последовательности. В связи с этим возникает понятие ориентированной кривой: если мы пользуемся параметрами первой группы, то кривую Γ будем называть кривой Γ_+; если мы пользуемся параметрами второй группы, то кривую назовем кривой Γ_-. Говорят, что ориентированной кривой Γ_+ соответствует положительное направление обхода кривой Γ (с ростом параметра), а кривой Γ_- – отрицательное направление обхода кривой Γ.

Рассмотрим удобный для многих приложений параметр s, который называется натуральным. Он определяется следующим образом: $s = s(t)$ – длина дуги отрезка кривой между точками $t = a$ и данной точкой t. Для спрямляемых кривых $x = x(t)$:

$$s(t) = \int_a^t |x'(\tau)|\, d\tau .$$

Для того, чтобы этот параметр был допустимым мы будем считать, что $|x'(t)| \neq 0$ при $t \in [a, b]$.

С помощью натурального параметра s кривая Γ, очевидно, ориентирована так же, как и с помощью параметра t. Можно ввести натуральный параметр и другим способом, чтобы получить кривую Γ_-:

$$s(t) = \int_t^b |x'(t)|\, d\tau \qquad (0 \le s \le \ell).$$

Очень удобно с помощью натурального параметра найти вектор касательной единичной длины. Если $x = \varphi(s)$, то касательная к кривой направлена по вектору $x' = \varphi'(s) = (\varphi_1'(s), \dots, \varphi_m'(s))$.

Покажем, что этот вектор имеет единичную длину.

Имеем $x = x(t) = \varphi(s(t))$.

Поэтому $|x'(t)| = |\varphi'(s) \cdot \dfrac{ds}{dt}|$.

Но $\left|\dfrac{ds}{dt}\right| = |x'(t)|$, откуда $|\varphi'(s)| = 1$, что и требовалось доказать. Очевидно, что вектор $x'(s)$ имеет противоположные направления для кривых Γ_+ и Γ_-.

<u>Примеры</u>. I. Найдем угол между касательной к кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, проходящей через точку $(1, 1, 1)$, и плоскостью $z = 0$. Единичный вектор касательной будет:

$$\vec{\ell} = \left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}, \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \right).$$

При $t=1$ имеем $\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$.

Проекция этой касательной на плоскость $z = 0$ будет $\vec{e}_z = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, 0 \right)$, а угол φ между касательной и плоскостью $z = 0$ равен углу между векторами $\vec{e}$ и $\vec{e}_z$.

Поэтому $\cos\varphi = |\vec{e}_z| = \sqrt{\frac{5}{14}}$, откуда $\varphi = \arccos\sqrt{\frac{5}{14}}$.

2. Найдем длину винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \qquad 0 \le t \le 2\pi .$$

Имеем:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2} .$$

§ 2. Криволинейные интегралы

Определение I. Пусть s – натуральный параметр кривой Γ $(0 \le s \le \ell)$. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ определена для точек кривой Γ.

Интеграл $J = \int_0^{\ell} f[x_1(s), x_2(s), \ldots, x_m(s)]\, ds$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ вдоль кривой Γ и обозначается через $\int_\Gamma f(x_1, \ldots, x_m)\, ds$.

Если вместо натурального параметра s будем использовать любой другой параметр t, причем $a \le t \le b$, то

$$J = \int_a^b f[x_1(t), \ldots, x_m(t)]\, |x'(t)|\, dt .$$

Интеграл J не зависит от ориентации кривой при помощи параметра t.

<u>Определение 2</u>. Пусть $F(x) = F(x_1, \dots x_m) = (F_1, \dots, F_m)$ - m- мерная вектор-функция и функции $F_i = F_i(x_1, \dots, x_m)$ определены в точках кривой Γ. Криволинейным интегралом от вектор-функции $F(x) = F(x_1, \dots, x_m)$ вдоль кривой Γ (криволинейным интегралом второго рода) называется интеграл

$$J = \int_0^{\ell} F[x(s)] \cdot x'(s)\, ds .$$

Здесь $F[x(s)] \cdot x'(s)$ - скалярное произведение:

$$F[x(s)] \cdot x'(s) = \sum_{i=1}^{m} F_i[x_1(s), x_2(s), \dots, x_m(s)] \cdot x_i'(s) .$$

Так как $x_i'(s)\, ds = dx_i$, то для криволинейного интеграла второго рода используется также обозначение ;

$$J = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{m} F_i\, dx_i = \int_{\Gamma} F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + \dots + F_m\, dx_m .$$

В физике при $m = 3$ используются также другие обозначения: вектор-функция обозначается через $\vec{F}(x, y, z)$, а через $d\vec{S}$ обозначается вектор, направленный по касательной к кривой Γ, причем $|d\vec{S}| = ds$. В этих обозначениях

$$J = \int_{\Gamma} \vec{F}(x, y, z)\, d\vec{S} .$$

Укажем на связь криволинейного интеграла второго рода с определенным интегралом. Пусть параметр t дает ту же ориентацию кривой, что и натуральный параметр s, т.е.

$$a = t(0) < b = t(\ell) \qquad (0 \le s \le \ell),$$

Тогда, в силу того, что для кривой $x = x(t)$ имеем ;

$$dx = x'(s)ds = x'(t)dt$$, получим :

$$J = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m} F_i \cdot x_i'(t)\right) dt .$$

Если же параметр t дает ориентацию кривой, противоположную ориентации, даваемой с помощью параметра s, то $a = t(l) <$ $< b = t(0)$ и

$$J = -\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{m} F_i \cdot x_i'(t)\right) dt .$$

Эти рассуждения показывают, что

$$\int_{\Gamma_-} F[x(s)]x'(s)ds = -\int_{\Gamma_+} F[x(s)]x'(s)\,ds ,$$

т.е. криволинейный интеграл второго рода при изменении ориентации кривой меняет знак. Если Γ - замкнутая кривая, то интеграл $\int_\Gamma \sum_{i=1}^{m} F_i\, dx_i$ обозначается через $\oint_\Gamma \sum_{i=1}^{m} F_i\, dx_i$ и называется циркуляцией вектора F вдоль кривой Γ.

Примеры. I. Пусть мы имеем кривую Γ, состоящую из материальных точек, а линейная плотность (т.е. плотность вещества, приходящаяся на единицу длины) равна ρ. Вычислим массу M кривой Γ.

Разобьем кривую Γ на n кусков и пусть s_i - длина участка кривой от начала до точки с номером i. Масса кривой приближенно равна

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho(s_i)\,\Delta s_i \quad , \qquad \text{где } \Delta s_i = s_{i+1} - s_i .$$

В пределе при $\max_i \Delta s_i \to 0$ получаем :

$$M = \int_0^l \rho(s)\,ds.$$

---

2. Пусть на некоторое тело действует сила

$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$$

и тело под действием этой силы перемещается по кривой Γ. Найдем работу, совершаемую этой силой.

Сила при перемещении на длину l вдоль направления силы совершает работу равную $\vec{F}\cdot\vec{l}$, если же на тело действует сила $\vec{F}$, а тело перемещается перпендикулярно направлению силы, то сила не совершает работу. Поэтому при перемещении тела в направлении вектора $\vec{l}$ на длину, равную $|\vec{l}|$, сила совершает работу $\vec{F}\cdot\vec{l}$. Действительно, $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, где $\vec{F_1}$ - проекция силы на направление $\vec{l}$, $\vec{F_2}$ - сила, направленная перпендикулярно $\vec{l}$. Первая сила совершает работу $\vec{F_1}\cdot\vec{l} = \vec{F}\cdot\vec{l}$, вторая же не совершает работы. При перемещении тела вдоль кривой работа приближенно равна $\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}\cdot\Delta\vec{r_i}$, где $\vec{r} = (x,y,z)$ - радиус-вектор, $\Delta\vec{r_i} = \vec{r}_{i+1} - \vec{r_i}$. В пределе получаем, что работа равна:

$$\int_\Gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_\Gamma F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz .$$

Особый интерес представляют так называемые потенциальные силы, когда вектор $\vec{F}$ можно представить в виде градиента некоторой функции: $F = \mathrm{grad} f$.

В этом случае

$$\int_\Gamma F[x(s)]\cdot x'(s)ds = \int_0^\ell \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial s}\,ds =$$

$$= \int_0^\ell \frac{df[x(s)]}{ds}\,ds = f[x(\ell)] - f[x(0)].$$

Таким образом, для потенциальных сил интеграл

$$\int_\Gamma F[x(s)]\cdot x'(s)ds$$

однозначно определяется заданием начальной и конечной точек кривой Γ и не зависит от вида самой кривой Γ.

В физике задание вектор-функции $\vec{F}(x, y, z)$ называется заданием векторного поля. Если $\vec{F}(x, y, z) = {}$ $= grad f(x,y,z)$, то векторное поле называется потенциальным, а функция $f(x, y, z)$ – скалярным полем.

3. Найдем массу M дуги кривой

$$y^2 - 4x^2 = 3z^2, \quad y^2 = x$$

от точки $(0, 0, 0)$ до точки $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0\right)$, если линейная плотность $\rho = z$ $(z > 0)$.

В качестве параметра кривой возьмем переменную y. Тогда $x = y^2$, $z = y\sqrt{\frac{1-4y^2}{3}}$ (перед корнем взят знак+, + , чтобы удовлетворить условию $z > 0$). Поэтому

$$M = \int_0^{\frac{1}{2}} z(y)\sqrt{1+(x'_y)^2+(z'_y)^2}\,dy = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} y(1-2y^2)\,dy = \frac{1}{16}.$$

§ 3. Гладкая поверхность

Будем называть поверхностью в трехмерном пространстве точек (x, y, z) множество точек (x, y, z), удовлетворяющих равенству $F(x, y, z) = 0$. Предполагая разрешимость этого равенства относительно переменной z, мы получим уравнение поверхности в виде $z = f(x, y)$.

Аналогичным образом, разрешая уравнение $F(x,y,z) = 0$ относительно x или y, можно получить уравнение поверхности в виде $y = f(z, x)$ или $x = f(y, z)$. Чтобы объединить указанные виды уравнения поверхности, будем считать, что поверхность S задается равенствами:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v),$$

где u, v - некоторые параметры. Мы будем предполагать, что функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ имеют в некоторой области изменения переменных u, v непрерывные частные производные первого порядка и хотя бы один из якобианов

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

отличен от нуля в любой точке (u, v).

Покажем, что такое определение поверхности действительно является обобщением рассмотренных выше определений. Так как хотя бы один из якобианов:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

отличен от нуля, то существует функциональная зависимость между

функциями $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, т.е. одна из зависимостей вида $z=f_1(x,y)$, $x=f_2(y,z)$, $y=f_3(z,x)$, причем функции $f_1(x,y)$, $f_2(y,z)$, $f_3(z,x)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка. В общем случае эти равенства можно записать в виде $F(x,y,z)=0$, где функция $F(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка. Прежде, чем давать более строгое определение поверхности, введем определение связного множества.

<u>Определение</u>. Множество A точек $x=(x_1,\dots,x_m)$ называется связным множеством, если любые точки этого множества можно соединить кусочно-гладкой кривой, точки которой принадлежат множеству A.

<u>Определение</u>. Пусть A - открытое связное множество точек (u,v) с границей γ, являющейся кусочно-гладкой кривой. Множество точек (x, y, z), задаваемых равенствами $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, где $(u,v)\in A$, будем называть элементарным гладким куском поверхности, если функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ имеют частные производные первого порядка, непрерывные на множестве A вплоть до границы γ и хотя бы один из якобианов

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

отличен от нуля при любых значениях u и v. Множество точек $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ будем называть кусочно-гладкой поверхностью, если это множество связно и его можно разбить на конечное число элементарных гладких кусков. При этом будем считать, что различным точкам

(u, v) соответствуют различные точки поверхности.

Рассмотрим границу γ множества A, на котором определены функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ для элементарного гладкого куска поверхности. Так как граница γ является кусочно-гладкой кривой, то на γ имеем $u = u(s)$, $v = v(s)$, где s - натуральный параметр, а функции $u(s)$ и $v(s)$ имеют кусочно-непрерывные производные первого порядка. Поэтому граница поверхности, задаваемая уравнениями $x = x[u(s), v(s)]$, $y = y[u(s), v(s)]$, $z = z[u(s), v(s)]$, является кусочно-гладкой кривой. Таким образом, граница кусочно-гладкой поверхности является кусочно-гладкой кривой.

Рассмотрим гладкие кривые $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, проходящие по поверхности. Покажем, что касательные к кривым, проходящим через фиксированную точку поверхности, лежат в одной плоскости, которую естественно назвать касательной плоскостью к поверхности в данной точке. Действительно, если поверхность задается уравнением $F(x, y, z) = 0$, то для кривой, проходящей через фиксированную точку поверхности (x_0, y_0, z_0), имеем равенства $F[x(t), y(t), z(t)] = 0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(t_0)}{\partial t} + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(t_0)}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z(t_0)}{\partial t} = 0 .$$

Левая часть этого равенства является скалярным произведением вектора $grad F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ и вектора каса-

тельной $\vec{e} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$: $\operatorname{grad} F \cdot \vec{e} = 0$.

Таким образом, касательные к кривым, проходящим через фиксированную точку поверхности, ортогональны одному и тому вектору $\operatorname{grad} F$ и поэтому лежат в одной плоскости. Вектор, ортогональный любым векторам, лежащим в касательной плоскости, будем называть нормалью к поверхности.

Если уравнение поверхности записано в виде $z = f(x, y)$, то $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ и нормаль к поверхности направлена по вектору $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}, -1\right)$. Найдем нормаль к поверхности в случае, когда уравнение поверхности задано в виде :

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v) .$$

Если исключить из этих равенств параметры u и v, то мы приходим к уравнению поверхности в виде $F(x, y, z) = 0$.

Выразим вектор $\operatorname{grad} F$ через частные производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Так как

$$F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = 0 ,$$

то

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Предположим, что в данной точке $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$.

Из приведенных равенств имеем :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}} .$$

Поэтому вектор $\operatorname{grad} F$ пропорционален вектору

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\cdot\vec{i}+\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\cdot\vec{j}+\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\vec{k}\;.$$

Аналогичный результат получим и в случае, когда $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\neq 0$ или $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\neq 0$. Поэтому нормаль к поверхности направлена по вектору $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\vec{i}+\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\vec{j}+\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\vec{k}$.

Вектор нормали длины, равной 1 (единичный вектор нормали), будет :

$$\vec{n}=\pm\frac{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\vec{i}+\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\vec{j}+\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\vec{k}}{\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}}\;.$$

Знак в этом выражении может быть выбран любым. В связи с различной возможностью выбора знака возникает понятие ориентируемой поверхности.

<u>Определение</u>. Поверхность называется ориентируемой, если в каждой точке этой поверхности можно так выбрать единичный вектор нормали к поверхности $\vec{n}(x,y,z)$, чтобы вектор-функция $\vec{n}(x,y,z)$ была непрерывной на поверхности.

Если договориться об определенном выборе знака в полученном выше выражении для $\vec{n}(x,y,z)$, то элементарный гладкий кусок поверхности становится ориентируемой поверхностью.

Рассмотрим теперь обобщение понятия ориентируемой поверхности, пригодное и для кусочно-гладких поверхностей. Пусть Γ - некоторая замкнутая кусочно-гладкая кривая на поверхности, окружающая точку (x,y,z) этой поверхности. Если мы будем стягивать кривую Γ к точке (x,y,z), то

на кривой Γ при этом можно выбрать положительное направление обхода следующим образом: пусть штопор с "правой" резьбой ввинчивается по направлению вектора $\vec{n}(x, y, z)$.

Тогда направление вращения головки штопора задает положительное направление обхода кривой Γ. Так как вектор $\vec{n}(x, y, z)$ для ориентируемой поверхности является непрерывной функцией, то указание положительного направления обхода контура в одной точке поверхности однозначно определяет положительное направление обхода контура в любой точке этой поверхности, в том числе и положительное направление обхода на границе поверхности. Будем кусочно-гладкую поверхность считать ориентируемой поверхностью, задавая ориентацию элементарных гладких кусков таким образом, чтобы части границ этих кусков, принадлежащих одновременно двум элементарным гладким кускам, имели противоположные направления обхода. При такой договоренности выбор знака $\vec{n}(x, y, z)$ в одной точке поверхности однозначно определяет выбор знака в любых точках поверхности.

Рассмотрим применение введенных понятий для получения некоторых характеристик функции трех переменных $u = f(x, y, z)$. Множество точек, для которых $f(x, y, z) = C$, где C – постоянная, будем называть поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$. Так как в этом случае $F(x, y, z) = f(x, y, z) - C = 0$, то нормаль к поверхности уровня направлена по вектору $\operatorname{grad} f(x, y, z) = \operatorname{grad} u$.

В заключение найдем уравнение, связывающее точки плоскости (x, y, z), если нормаль к этой плоскости направлена по вектору (A, B, C). Пусть $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – точки плоскости. Тогда вектор $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ лежит в плоскости и должен быть ортогонален вектору (A, B, C), т.е. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. В частности, уравнение касательной плоскости к поверхности уровня функции $u = f(x, y, z)$,

проходящей через точку (x_0, y_0, z_0),
имеет вид :

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

§ 4. Площадь поверхности

Пусть равенства, определяющие поверхность S: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, можно разрешить относительно переменной z : $z=f(x,y)$, где $(x,y)\in B$.

Предположим, что множество B измеримо. Пусть R – разбиение множества B на измеримые части B_j с диаметром, меньшим Δ $(j=0,1,\ldots,n-1)$. Рассмотрим цилиндр с образующей, параллельной оси z и с основанием, равным B_j. На плоскости, касательной к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $(x,y)\in B_j$, этот цилиндр вырежет плоскую фигуру B_j' площадью

$$mB_j'=\frac{mB_j}{|\cos(\vec{n},z)|},$$

где $(\vec{n},z)$ угол между вектором нормали $\vec{n}$ и осью z (площадь проекции плоской фигуры равна площади самой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью, на которую проектируется фигура). Величина mB_j' дает представление о площади поверхности $z=f(x,y)$, соответствующей множеству точек $(x,y)\in B_j$. Поэтому площадью поверхности S назовем предел при $\Delta\to 0$ суммы

$$S_R=\sum_{j=0}^{n-1}mB_j'=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{mB_j}{|\cos(\vec{n},z)|},$$

если этот предел не зависит от способа разбиения R и вы-

бора точек $(x,y)\in B_j$.

Итак, площадь поверхности $z=f(x,y)$ равна

$$\sigma=\int_B \frac{dx\,dy}{|\cos(\vec{n},z)|}.$$

Если поверхность задается уравнением $y=f(z,x)$ или $x=f(y,z)$, то, соответственно,

$$\sigma=\int_{B_y}\frac{dz\,dx}{|\cos(\vec{n},y)|} \quad \text{или} \quad \sigma=\int_{B_x}\frac{dy\,dz}{|\cos(\vec{n},z)|}.$$

Покажем, что все три выражения равносильны, если пользоваться уравнением поверхности S в параметрической форме:

$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, где

$(u,v)\in A$. Будем считать множество A измеримым. Воспользуемся формулой замены переменных для кратных интегралов.

Так как

$$\vec{n}=\cos(\vec{n},x)\vec{i}+\cos(\vec{n},y)\vec{j}+\cos(\vec{n},z)\vec{k}=$$

$$=\pm\frac{\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}\cdot\vec{i}+\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}\cdot\vec{j}+\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\vec{k}}{\sqrt{\left[\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}},$$

то во всех трех случаях для площади поверхности σ получаем выражение:

$$\sigma=\int_A\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\,du\,dv.$$

В общем случае, в дальнейшем, будем считать, что площадь

кусочно-гладкой поверхности S определяется этим выражением.

Пример. Найдем площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=x$, вырезанной сферой $x^2+y^2+z^2=1$.
Будем использовать сферические координаты: $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=r\cos\vartheta$, где $0\le\vartheta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Уравнение цилиндрической поверхности дает соотношение между r, ϑ, φ:

$$r\sin\vartheta=\cos\varphi.$$

Так как для сферы $r=1$, то требуется найти площадь части цилиндра, для которой $0\le r\le 1$. Исключим переменную r. Тогда уравнение цилиндрической поверхности будет

$$x=\cos^2\varphi,\quad y=\cos\varphi\cdot\sin\varphi,\quad z=\operatorname{ctg}\vartheta\cdot\cos\varphi.$$

Пусть A – множество точек цилиндрической поверхности, для которых $0\le r\le 1$, т.е. $0\le\dfrac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\le 1$. Тогда площадь, которую мы должны найти, равна

$$S=\iint\limits_A\sqrt{\left[\frac{D(z,x)}{D(\vartheta,\varphi)}\right]^2+\left[\frac{D(y,z)}{D(\vartheta,\varphi)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(\vartheta,\varphi)}\right]^2}\,d\vartheta\,d\varphi=\iint\limits_A\frac{|\cos\varphi|}{\sin^2\vartheta}\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Перейдем от двойного интеграла к повторному. Так как $0\le\dfrac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\le 1$, то при $0\le\vartheta\le\dfrac{\pi}{2}$ имеем $\dfrac{\pi}{2}-\vartheta\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ или $\dfrac{3\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}+\vartheta$; если же $\dfrac{\pi}{2}\le\vartheta\le\pi$, то $-\dfrac{\pi}{2}+\vartheta\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ или $\dfrac{3\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{5\pi}{2}-\vartheta$.

Поэтому

$$S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\vartheta}\cos\varphi\,d\varphi\right]+$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\vartheta}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}-\vartheta}\cos\varphi\,d\varphi\right]=4\,.$$

§ 5. Поверхностный интеграл первого рода

Пусть некоторая функция $F(x, y, z)$ определена по крайней мере для точек поверхности :

$$x=x(u,v)\ ,\qquad y=y(u,v)\ ,\qquad z=z(u,v)\ ,$$

$(u,v)\in A$, где A - измеримое множество. Разобьем множество A на измеримые части с диаметром меньшим Δ $(j=0,1,\ldots,n-1)$. Пусть множеству A_j соответствует площадь $\Delta\sigma_j$ рассматриваемой поверхности . Если существует предел

$$J=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}F[x(\tilde{u}_j,\tilde{v}_j),\,y(\tilde{u}_j,\tilde{v}_j),\,z(\tilde{u}_j,\tilde{v}_j)]\,\Delta\sigma_j$$

$((\tilde{u}_j,\tilde{v}_j)\in A_j)$, не зависящий от способа разбиения и выбора точек $\tilde{u}_j$, $\tilde{v}_j$, то этот предел называется поверхностным интегралом первого рода по поверхности S от функции $F(x,y,z)$ и обозначается через $\int\limits_S F(x,y,z)\,d\sigma$.

Интеграл J сводится к двукратному интегралу в случае, когда поверхность имеет конечную площадь, частные произ-

водные первого порядка функций $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ ограничены, а функция $F[x(u,v),\ y(u,v),z(u,v)]$ интегрируема на множестве A. Действительно, заменим величину $\Delta\sigma_j$ выражением

$$\Delta\sigma_j=\int\limits_{A_j}\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\ du\,dv.$$

Покажем, что $J=J^*$, где

$$J^*=\int\limits_A F[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\ du\,dv.$$

Имеем:

$$\left|J^*-\sum_{j=0}^{n-1}F[x(\tilde u_j,\tilde v_j),\ y(\tilde u_j,\tilde v_j),\ z(\tilde u_j,\tilde v_j)]\Delta\sigma_j\right|=$$

$$\leq\sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_{A_j}\Big|F[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]-$$

$$-F[x(\tilde u_j,\tilde v_j),y(\tilde u_j,\tilde v_j),z(\tilde u_j,\tilde v_j)]\Big|\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\ du\,dv\leq$$

$$\leq\max_{(u,v)\in A}\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j\cdot mA_j\ ,$$

где ω_j - колебание функции $F[x(u,v),\ y(u,v),z(u,v)]$ на множестве A_j. Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $\Delta\to0$, в силу интегрируемости функции $F[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]$ на множестве A,

то действительно $J = J^*$.

Пример. Вычислим интеграл $J = \iint\limits_S (x+y+z)\,d\sigma$,

где σ – полусфера $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$. Будем использовать сферические координаты:

$x = \sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = \cos\vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Тогда

$$d\sigma = \sqrt{\left[\frac{D(z,x)}{D(\vartheta,\varphi)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(\vartheta,\varphi)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,y)}{D(\vartheta,\varphi)}\right]^2}\, d\vartheta\, d\varphi = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi .$$

Поэтому $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} (\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta)\, d\varphi = \pi$.

§ 6. Поверхностный интеграл второго рода

Пусть кусочно-гладкая поверхность ориентирована. Для каждого элементарного гладкого куска этой поверхности определен единичный вектор нормали:

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\vec{i} + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\vec{j} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\vec{k}}{\sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}} .$$

Выбор знака соответствует выбору ориентации поверхности. Пусть вектор-функция $\vec{F}(x, y, z)$ задана и непрерывна по крайней мере для точек поверхности S. Интегралом от вектор-функции

$\vec{F}(x, y, z)$ по поверхности S (поверхностным интегралом второго рода) называется поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения $\vec{F}\cdot\vec{n}$. Если

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

то поверхностный интеграл второго рода будет

$$J = \int\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int\limits_S [P\cos(\vec{n},x) + Q\cos(\vec{n},y) + R\cos(\vec{n},z)]\,d\sigma .$$

Для поверхностного интеграла второго рода часто используется также другое обозначение. Вводится элементарный вектор площадки $d\vec{\sigma}$, направленный по нормали к поверхности, причем $|d\vec{\sigma}| = d\sigma$. Очевидно, что $d\vec{\sigma} = \vec{n}\,d\sigma$.

В этих обозначениях $J = \int\limits_S \vec{F}\,d\vec{\sigma}$.

В физике поверхностный интеграл второго рода называют потоком вектора $\vec{F}$ через ориентируемую поверхность S.

Перейдем в интеграле J к интегрированию по параметрам (u , v):

$$J = \pm\int\limits_A \Big\{P[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\cdot\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\cdot\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]\cdot\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big\}\,du\,dv .$$

Выбор знака соответствует выбору ориентации поверхности S. Пусть уравнение поверхности S можно записать одновременно в трех видах:

$$z = f_1(x,y)\ ((x,y)\in A_z),\quad y = f_2(z,x)\ ((z,x)\in A_y),$$
$$x = f_3(y,z)\ ((y,z)\in A_x).$$

Приведем выражения для поверхностных интегралов первого рода к двухкратным интегралам по переменным (x , y), (z , x), (y , z), соответственно. В первом случае $u=x$, $v=y$, во втором $u=z$, $v=x$, в третьем $u=y$, $v=z$. Поэтому

$$\int_S F(x,y,z)\,d\sigma = \int_{A_z} F[(x,y,f_1(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}\,dx\cdot dy=$$

$$= \int_{A_y} F[x,f_2(z,x),z]\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}\,dx\cdot dz =$$

$$= \int_{A_x} F[f_3(y,z),y,z]\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)^2}\,dy\cdot dz .$$

Здесь

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{|\cos(\vec{n},z)|},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{|\cos(\vec{n},y|},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{|\cos(\vec{n},x)|}.$$

Все выражения для интегралов первого рода соответствуют замене элемента площади $d\sigma$ на выражения

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{|\cos(\vec{n},z)|} = \frac{dz\,dx}{|\cos(\vec{n},y)|} = \frac{dy\,dz}{|\cos(\vec{n},x)|}.$$

Поэтому для поверхностных интегралов второго рода имеем :

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_S [P(x,y,z)\cos(\vec{n},x) + Q(x,y,z)\cos(\vec{n},y) + R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)]\,d\sigma =$$

$$= \int_{A_x} P[f_3(y,z),y,z]\,\mathrm{sign}[\cos(\vec{n},x)]\,dy\,dz +$$

$$+ \int_{A_y} Q[x,f_2(z,x),z]\,\mathrm{sign}[\cos(\vec{n},y)]\,dz\,dx +$$

$$+ \int_{A_z} R[x,y,f_1(x,y)]\,\mathrm{sign}[\cos(\vec{n},z)]\,dx\,dy\,,$$

где $$\mathrm{sign}\,x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0\,. \end{cases}$$

В связи с этим удобно ввести понятие ориентируемой плоской поверхности A_x^* , A_y^* , A_z^* , считая, что поверхность A_x ориентирована положительно, если направление обхода границы поверхности S при проектировании на плоскость (y, z) таково, что область A_x будет оставаться слева (вращение против часовой стрелки). В противном случае поверхность считается ориентируемой отрицательно. Аналогично вводятся ориентируемые плоские поверхности A_y^* , A_z^* . Определим интеграл по ориентируемой поверхности A_x^* :

$$\int_{A_x^*} f(y,z)\,dy\,dz = \pm\int_{A_x} f(y,z)\,dy\,dz\,.$$

Знак плюс соответствует положительной ориентации плоской поверхности, знак минус - отрицательной ориентации. В соответствии с этой договоренностью

$$\int\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int\limits_{A_x^*} P(x,y,z)\,dy\,dz + \int\limits_{A_y^*} Q(x,y,z)\,dz\,dx + \int\limits_{A_z^*} R(x,y,z)\,dx\,dy .$$

§ 7. Формула Гаусса-Остроградского

В физике широко употребляется так называемая формула Гаусса-Остроградского, связывающая интеграл по объему V с интегралом по ограничивающей этот объем поверхности S :

$$\int\limits_V div\,\vec{F}(x,y,z)\,dv = \int\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma .$$

Здесь $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности S , направленный во внешность объема V ,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} ,$$

$$div\,\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} .$$

Величина $div\,\vec{F}$ называется дивергенцией вектор-функции $\vec{F}$.

Выведем формулу Гаусса-Остроградского для области, являющейся частью цилиндра с образующей вдоль оси z :

$$\varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y), \quad (x,y) \in A_z .$$

Заменяя трехкратный интеграл повторным, получим:

$$\int\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dv = \int\limits_{A_z} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \int\limits_{A_z} dx\,dy \left\{ R[x,y,\varphi_2(x,y)] - R[x\cdot y\cdot \varphi_1(x,y)] \right\} =$$

$$= \int\limits_S R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,d\sigma .$$

Мы воспользовались тем, что на боковой поверхности цилиндра $\cos(\vec{n}, z) = 0$, на поверхности $z = \varphi_2(x, y)$ имеем $\cos(\vec{n}, z) > 0$, на поверхности $z = \varphi_1(x, y)$ имеем $\cos(\vec{n}, z) < 0$. Кроме того, $d\sigma = \dfrac{dx\,dy}{|\cos(\vec{n}, x)|}$.

Итак, формула Гаусса-Остроградского доказана в случае $P = Q = 0$ для объемов V специального вида. В общем случае объем V можно разбить на сумму объемов этого вида: $V = \sum_j V_j$. При этом $\int_V \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dV = \sum_j \int_{S_j} R\cos(\vec{n}, z)\, d\sigma$.

Части поверхностных интегралов, соответствующие границам между двумя соседними объемами V_j, пропадают, так как $\cos(\vec{n}, z)$ для двух таких поверхностей отличается знаком. В результате получаем:

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_S R\cos(\vec{n}, z)\, d\sigma .$$

Аналогично можно получить равенства:

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x} dV = \int_S P\cos(\vec{n}, x)\, d\sigma ,$$

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \int_S Q\cos(\vec{n}, y)\, d\sigma .$$

Складывая все полученные соотношения, приходим к формуле Гаусса-Остроградского.

Рассмотрим частный случай формулы Гаусса-Остроградского, когда вектор-функция $\vec{F}(x, y, z)$ не зависит от z, $R = 0$, а объем V - цилиндр высоты h, причем нижнее основание цилиндра A лежит на плоскости (x, y) и ограничено

контуром Γ : $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(0 \le s \le \ell)$.

Будем считать, что ориентация кривой выбрана таким образом, чтобы часть плоскости, охватываемая кривой Γ при обходе этой кривой в положительном направлении оставалась слева.

Имеем:

$$\int_V div\vec{F}\,dv = \int_0^h dz \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy .$$

Поверхностные интегралы по основаниям цилиндра равны нулю, так как подинтегральные функции содержат равные нулю множители $cos(\vec{n}, x)$ и $cos(\vec{n}, y)$. Для вычисления интеграла по боковой поверхности цилиндра в качестве параметров возьмем переменные z и s $(0 \le z \le h$, $0 \le s \le \ell)$. Тогда

$$\int_S [P cos(\vec{n},x) + Q cos(\vec{n},y)] d\sigma = \int_0^h dz \int_0^\ell [P cos(\vec{n},x) + Q cos(\vec{n},y)] ds .$$

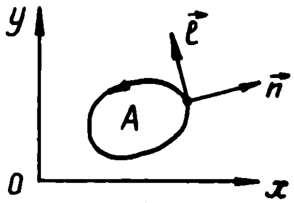


Рис.8

Но вектор $\vec{\ell}$ касательной к кривой Γ получается из вектора $\vec{n}$ поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} cos(\vec{n},x) &= cos(\vec{\ell},y) = \frac{dy}{ds} \\ cos(\vec{n},y) &= -cos(\vec{\ell},x) = -\frac{dx}{ds} \end{aligned}\right\}$$

и, следовательно, формула Гаусса-Остроградского приводит к равенству

$$\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_0^{\ell} \left[P(x,y)\frac{dy}{ds} - Q(x,y)\frac{dx}{ds}\right] ds =$$

$$= \int_\Gamma P dy - Q dx .$$

Формула, получающаяся из этого соотношения заменой Q на $-Q$ называется формулой Грина:

$$\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\Gamma P dy + Q dx .$$

Напомним, что Γ - контур, охватывающий область A, причем при обходе контура в положительном направлении область A остается слева, что соответствует положительной ориентации плоской области. Будем считать, что векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ составляют правую тройку векторов, т.е. при вращении рукоятки штопора с "правой резьбой" от вектора $\vec{i}$ к вектору $\vec{j}$ сам штопор движется по направлению вектора $\vec{k}$. В таком случае обход контура плоской поверхности, расположенной в плоскости (x, y), в положительном направлении соответствует направлению вектора $\vec{k}$. Аналогичное соображение имеет место и для плоскостей (y, z), (z, x).

<u>Пример.</u> Вычислим интеграл

$$J = \int_\Gamma x\,dy + y\,dx ,$$

где Γ - эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

По формуле Грина получим:

$$J = \iint_S \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 .$$

§ 8. Формула Стокса

Наряду с формулой Гаусса-Остроградского в физике широко используется формула Стокса:

$$\int \operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{\sigma} = \int_{\Gamma} \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{s} .$$

Здесь

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} ,$$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

Γ - контур, охватывающий поверхность S и ориентированный соответственно ориентации поверхности S .

Словами формулу Стокса можно сформулировать следующим образом: поток вектора $\operatorname{rot} F$ (rot читается - ротор) через ориентированную поверхность S равен циркуляции вектора $\vec{F}$ по контуру Γ , охватывающему поверхность S и ориентированному соответственно ориентации поверхности S .

Доказательство формулы Стокса проведем первоначально для элементарного гладкого куска поверхности, описываемого любым из уравнений:

$$x = f_1(y,z) \qquad ((y,z) \in A_x) ,$$

$$y = f_2(z,x) \qquad ((z,x) \in A_y) ,$$

$$z = f_3(x,y) \qquad ((x,y) \in A_z) .$$

Имеем:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{F}\, d\vec{\sigma} = \int_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \cos(\vec{n}, x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(\vec{n}, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(\vec{n}, z)\right\} d\sigma .$$

Рассмотрим в этом интеграле члены, содержащие $P(x, y, z)$. Так как на поверхности $z = f_3(x, y)$ векторы $\vec{n}$ и $\frac{\partial f_3}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$ пропорциональны, то $\cos(\vec{n}, y) = -\cos(\vec{n}, z)\frac{\partial f_3}{\partial y}$. Поэтому на поверхности $z = f_3(x, y)$ имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\vec{n},y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\vec{n},z) = -\cos(\vec{n},z)\left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial y}\right] =$$

$$= -\cos(\vec{n},z)\,\frac{\partial P[x,y,f_3(x,y)]}{\partial y}.$$

Пусть для определенности при проектировании ориентируемой поверхности S на плоскость (x, y) получаем плоскую поверхность A_z, ориентированную положительно (противоположный случай рассматривается аналогично). Тогда

$$\int\limits_S\left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\vec{n},y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\vec{n},z)\right]d\sigma = -\int\limits_{A_z}\frac{\partial P[x,y,f_3(x,y)]}{\partial y}\,dx\,dy.$$

По формуле Грина последний интеграл равен

$$\int\limits_{\Gamma_z} P[x,y,f_3(x,y)]\,dx,$$

где Γ_z - проекция контура Γ на плоскость (x , y). Уравнения контура Γ имеют вид $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = f[x(s), y(s)]$ $(0 \le s \le \ell$, s - натуральный параметр кривой $\Gamma_z)$.
Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_z} P[x,y,f_3(x,y)]\,dx = \int\limits_0^{\ell} P\left\{x(s), y(s), f_3[x(s), y(s)]\right\}\frac{dx}{ds}\,ds =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx,$$

откуда

$$\int\limits_S \left[\frac{\partial P}{\partial x}\cos(\vec{n},y)-\frac{\partial P}{\partial y}\cos(\vec{n},z)\right]d\sigma=\int\limits_\Gamma P(x,y,z)\,dx .$$

Аналогично можно получить равенства:

$$\int\limits_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\vec{n},z)-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos(\vec{n},x)\right]d\sigma=\int\limits_\Gamma Q(x,y,z)\,dy ,$$

$$\int\limits_S \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cos(\vec{n},x)-\frac{\partial R}{\partial x}\cos(\vec{n},y)\right]d\sigma=\int\limits_\Gamma R(x,y,z)\,dz.$$

Складывая все эти равенства, получаем:

$$\int\limits_V rot\,\vec{F}(x,y,z)\,d\vec{\sigma}=\int\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_\Gamma \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{s} .$$

Это и есть формула Стокса.

Рассмотренные выше выкладки теряют смысл, если при проектировании поверхности на плоскость (x, y) мы получаем не плоскую поверхность, а линию, т.е. когда на поверхности $\cos(\vec{n},z)=0$. В этом случае вместо уравнения поверхности $z=f_3(x,y)$ можно рассмотреть уравнение $y=f_2(z,x)$, причем функция $f_2(z,x)$ не зависит от z.

Поэтому

$$\int\limits_S \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\vec{n},y)-\frac{\partial P}{\partial y}\cos(\vec{n},z)\right]d\sigma=\int\limits_{S_y}\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx .$$

С помощью формулы Грина этот интеграл преобразуется аналогично рассмотренному выше, в интеграл $\int\limits_\Gamma P\,dx$.

Для того, чтобы доказать формулу Стокса для произвольной кусочно-гладкой поверхности, разобьем поверхность S на куски S_i, удовлетворяющие условиям, рассмотренным выше. Пусть Γ_i - контур, охватывающий поверхность S_i и ориентированный в соответствии с ориентацией поверхности S_i. Тогда

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \sum_i \int_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \sum_i \int_{\Gamma_i} \vec{F}\cdot d\vec{s} .$$

Контуры Γ_i содержат части контура Γ и границы соседних поверхностей S_i. Так как направление обхода границы двух соседних поверхностей противоположны для этих поверхностей, то криволинейные интегралы по таким границам в сумме дают нуль, т.е.

$$\sum_i \int_{\Gamma_i} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{\Gamma} \vec{F}\, d\vec{s} .$$

Таким образом, формула Стокса остается справедливой и в этом случае. Отметим в заключение удобный вид записи для вектора $\text{rot}\ F$ с помощью определителя:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} .$$

Определитель раскрывается с помощью разложения по элементам первой строки, символы $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ в каждом члене суммы ставятся на первое место, а P, Q, R - на второе. Под произведением $\dfrac{\partial}{\partial y}\cdot P$ понимается $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и т.д.

Пример. Вычислим интеграл

$$J = \oint\limits_{\Gamma} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz ,$$

где Γ - замкнутая кривая

$$x = \cos t, \quad y = \cos 2t , \quad z = \cos 3t \quad (0 \le t \le 2\pi) ,$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра t. Положим $\vec{F} = (y+z,\ z+x,\ x+y)$. Тогда $J = \oint\limits_{\Gamma} \vec{F}\, d\vec{s}$.

По формуле Стокса

$$J = \int\limits_{\sigma} \operatorname{rot} \vec{F}\, d\vec{\sigma} ,$$

где поверхность σ имеет границу Γ и ориентирована в соответствии с ориентацией кривой Γ. Так как $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, то $J = 0$.

§ 9. Оператор набла

Выражения для градиента, дивергенции, ротора удобно записать с помощью векторного оператора

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} .$$

Например, $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ записывается в виде "произведения" вектора ∇ на "число" $f(x,y,z)$. При этом вектор ∇ следует ставить на первом месте, а $f(x,y,z)$ - на втором. Под произведением $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial y} f$, $\frac{\partial}{\partial z} f$ следует понимать частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Таким образом, $\operatorname{grad} f = \nabla f$. В соответствии с этой договоренностью выражение $\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)$ можно записать в виде скалярного произведения вектора ∇

(набла) на вектор $\vec{F}(x, y, z)$, где

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} .$$

Таким образом, $div\,\vec{F}(x,y,z) = \nabla\cdot\vec{F}(x,y,z)$.

Для краткой записи $rot\,\vec{F}(x,y,z)$ рассмотрим понятие векторного произведения $\vec{c}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов. Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Из определения вытекают следующие свойства векторного произведения:

I) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$; 2) $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$,

$\vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$; 3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Докажем свойство 3 (остальные свойства очевидны). Прежде сделаем ряд замечаний: а) при доказательстве свойства 3 можно вследствие свойства 2 предполагать $|\vec{a}| = 1$; кроме того $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_1$, где $\vec{b}_1$ - проекция вектора $\vec{b}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{a}$. Поэтому имеем:

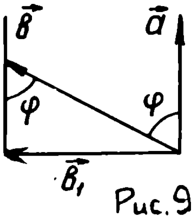


Рис. 9

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = $$
$$= \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{c}_1 = $$
$$= \vec{d}_1 + \vec{d}_2 .$$

Предположим, что вектор $\vec{a}$ перпендикулярен плоскости бумаги, на которой написаны лекции, и направлен к читателю. Тогда можно воспользоваться рисунком. Вектор $\vec{d}_1$ перпендикулярен

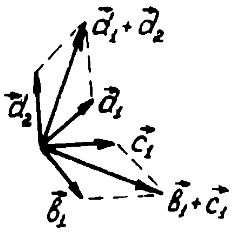


Рис. 10

вектору $\vec{b}_1$, вектор $\vec{a}_2$ перпендикулярен вектору $\vec{c}_1$ и

$$|\vec{a}_1| = |\vec{b}_1| ,$$

$$|\vec{a}_2| = |\vec{c}_1| .$$

Из рисунка видно, что вектор $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ перпендикулярен вектору $\vec{b}_1 + \vec{c}_1$ и

$$|\vec{a}_1 + \vec{a}_2| = |\vec{b}_1 + \vec{c}_1| .$$

Это и означает, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{c}_1)$,

т.е. $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$,

что и требовалось доказать. Из свойств 3 и I вытекает свойство

$$(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

и более общее свойство:

$$\left(\sum_i \vec{a}_i\right) \times \left(\sum_j \vec{b}_j\right) = \sum_{i,j} \vec{a}_i \times \vec{b}_j .$$

Пусть $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$,

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} .$$

Так как $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$,

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} ,$$

то

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

В связи с этим выражение $rot\,\vec{F}(x,y,z)$ можно формально написать с помощью векторного оператора ∇ в виде:

$$rot\,\vec{F}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F}(x,y,z).$$

Запись различных выражений с помощью оператора ∇ значительно экономит выкладки в вычислениях громоздких выражений, используемых в физике.

При преобразованиях выражений, содержащих оператор ∇, удобно использовать следующие легко проверяемые соотношения:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

Кроме того, так как оператор ∇ содержит производные первого порядка, то применение выражений, содержащих ∇, к произведению двух сомножителей дает сумму двух членов, в каждом из которых оператор ∇ применяется лишь к одному из сомножителей (то что оператор ∇ применяется к первому или второму сомножителю, будет отмечаться индексом I или 2 у оператора ∇, т.е. ∇ будем заменять на ∇_1 или ∇_2).

<u>Примеры</u>. I) $div\left[f(x,y,z)\cdot\vec{F}(x,y,z)\right] =$

$$= \nabla\cdot\left[f(x,y,z)\cdot\vec{F}(x,y,z)\right] = \nabla_1 f(x,y,z)\cdot\vec{F}(x,y,z) +$$

$$+ \nabla_2\cdot f(x,y,z)\vec{F}(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)\,grad\,f(x,y,z) +$$

$$+ f(x,y,z)\,div\,\vec{F}(x,y,z).$$

В частности, если $\vec{F}(x,y,z) = \vec{a}$, где $\vec{a}$ – фиксированный вектор, то

$$div\left[f(x,y,z)\cdot\vec{a}\right] = \vec{a}\cdot grad\,f(x,y,z).$$

С помощью этого соотношения из формулы Гаусса-Остроградского можно получить удобное для приложений соотношение. Полагая в формуле Гаусса-Остроградского $\vec{F}(x, y, z) = f(x,y,z)\vec{a}$, получим:

$$\int_S f(x,y,z)\, d\vec{\sigma}\cdot\vec{a} = \int_V \operatorname{grad} f(x,y,z)\, dv\cdot\vec{a} .$$

Ввиду произвольности вектора $\vec{a}$, будем иметь:

$$\int_S f(x,y,z)\, d\vec{\sigma} = \int_V \operatorname{grad} f(x,y,z)\, dv ;$$

2) $\operatorname{div}[\vec{F}_1(x,y,z)\times\vec{F}_2(x,y,z)] = \nabla\cdot(\vec{F}_1\times\vec{F}_2) =$

$$= \nabla_1\cdot(\vec{F}_1\times\vec{F}_2) + \nabla_2\cdot(\vec{F}_1\times\vec{F}_2) = \vec{F}_2\cdot(\nabla_1\times\vec{F}_1) - \vec{F}_1\cdot(\nabla_2\times\vec{F}_2) =$$

$$= \vec{F}_2\cdot\operatorname{rot}\vec{F}_1 - \vec{F}_1\cdot\operatorname{rot}\vec{F}_2 ;$$

3) $\operatorname{rot}[\vec{F}_1(x,y,z)\times\vec{F}_2(x,y,z)] = \nabla\times[\vec{F}_1\times\vec{F}_2] =$

$$= \nabla_1\times[\vec{F}_1\times\vec{F}_2] + \nabla_2\times[\vec{F}_1\times\vec{F}_2] =$$

$$= \vec{F}_1\cdot(\nabla_1\cdot\vec{F}_2) - \vec{F}_2\cdot(\nabla_1\cdot\vec{F}_1) + \vec{F}_1\cdot(\nabla_2\cdot\vec{F}_2) - \vec{F}_2\cdot(\nabla_2\cdot\vec{F}_1) =$$

$$= (\vec{F}_2\cdot\nabla_1)\vec{F}_1 - \vec{F}_2\cdot(\nabla_1\cdot\vec{F}_1) + \vec{F}_1(\nabla_2\cdot\vec{F}_2) - (\vec{F}_1\cdot\nabla_2)\vec{F}_2 =$$

$$= (\vec{F}_2\cdot\nabla)\vec{F}_1 - \vec{F}_2\operatorname{div}\vec{F}_1 + \vec{F}_1\operatorname{div}\vec{F}_2 - (\vec{F}_1\cdot\nabla)\vec{F}_2 ;$$

4) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \nabla\times[\nabla\times\vec{F}] = \nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{F}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{F} =$

$$= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$$

Здесь $\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

– оператор Лапласа.

Василий Борисович УВАРОВ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
часть II

Редактор И.Ф.Пальчун

Подписано к печати 31.5.82г. Тираж 300 экз.
Формат 60х84/16 Заказ № 108.
Объем 12,5 печ.л. Цена 31 коп.

НИВЦ МГУ